北海道大学

数学ⅠAⅡB対策講座

テキスト

北海道大学数学ⅠAⅡBを受講する皆さんへ

このテキストを手にしている皆さんは，志高くここまで勉強を進めてきたと思います。その努力を，**北海道大学に通用する力に仕上げるために必要なこと**とは？　…それをお話しする前に，まずは皆さんは**「細やかな技術」**がきちんと身についていますか？　特に高２までに数学の各分野のさまざまな問題を通じ，皆さんはさまざまな技術を磨いてきたはずです。もし不足している部分・分野が自覚されたときには，速やかに技術を再び磨いておいてください。

さて，数学においてはよく「応用力がない」という声を耳にします。それはいわゆる「公式暗記型」でしか数学を勉強していない人によく見られる気がします。「２次方程式が異なる２つの実数解をもつ」 ⇒ 「判別式 $D>0$」といったように。数学で大切なのは「⇒」，いわゆる「プロセス」の部分です。そこに至る「背景」「理由」ですね。それを理解した上で「⇒」をショートカットする分にはまったくかまいませんが。皆さんはちゃんとそれを自覚してきましたか？

そして，「応用力」とはまさに**「プロセス力」**と言えましょう。問題を見たとき，その問題が語っていることをその字面の奥に潜む部分まで読み込み，どこに自分の手で解決しなければならない「壁」があるのかを考えるわけです。さらに壁を越えるために何が必要か。その「鍵」がこの「⇒」に隠されています。そうです，それを選択すべき「理由」があるのです。はたまた，時には形の美しさといった，数学の枠を越えた部分にヒントが隠されていることもあるでしょう。それを見抜き，立式し，磨いた技術をもって計算し答案として仕上げていくのです。

このテキストは，この**「プロセス力」を養うために必要な問題が厳選**されています。後述しますが，このテキストの使い方に従い，画面を通じて伝わってくるものを目で，耳で，肌で吸収し，自分のものとするための**復習を実践**すれば（ここ大事！），無限に広がる数学の世界の扉は確実に開かれます。今日の授業から何が皆さんに伝わってきたのか。それを反芻し，ほかの異なる場面においても**「考える」癖をつける**。それこそが，北海道大学に通用する力となるでしょう。

そうです。**「この講座だけをやればいい」のではありません**。「傾向と対策」というものは，大学入試には存在しません。「たまたま」出ることが多かった分野に絞って勉強することのリスクが高すぎるからです。扉を開いた後は，自ら歩んでいくことです。そのために必要な問題集もご紹介いたします。扉が開かれているのにその先に進まない人はいないでしょう。なぜならば，その先にあなた方が目指す「北海道大学」があるのですから。

この講座を見るたびに，さまざまな「開かずの扉」が音を立てて開くでしょう。決してテクニカルなことは要求しません。必要なのは，磨いてきたはずの**技術**，そしてその技術を活かすべくこの講座をとらえる**謙虚な姿勢**，そして受かりたいという**気持ち**です。その気持ちで授業を聞き，もし感動することがあっても，感動したという事実だけでその日を終わらないでください。せっかく開きかけた扉も，時間がたてば自動的に閉まります。**真に感動すべきは，自分で「未知なる道」を切り開いた時**です。その感動をかみしめながら，一歩，また一歩，北海道大学を目指して前進しましょう。何かを見失ったとき，忘れた時，私は，指南役としていつもあなたのそばに現れます。

山内　恵介

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜北海道大学数学ⅠAⅡB　目次＞

第１講　２次関数・方程式・不等式
第２講　場合の数・確率
第３講　三角・指数・対数関数
第４講　図形と方程式
第５講　微分法・積分法①
第６講　微分法・積分法②
第７講　ベクトル
第８講　数列
第９講　総合問題⑴
第 10 講　総合問題⑵

＜講座の受講の仕方＞

①　予習について

すべての講は「講義問題」３問で形成されています。まずは何も見ないで問題をノートまたはルーズリーフに解いてみましょう。自分が問題をとらえる力がどこまで養われているかわかります。

ここでは必ずしも答案形式にこだわる必要はありません。掲載されている問題はすべて実際に北海道大学の入試に出題されたものですから，最後まで解けないことも多いかもしれません。それでも，いろいろな可能性を追ってみましょう。

ちなみに１問にかけてよい時間はおよそ 20 分です。もちろん，このまま続ければ（おそらく）最後の答に行き着く！　というところまでいっている場合は，30 分まではかけて結構です。３問でおよそ１時間から１時間半。数学に本気で向き合う時間です。

②　講義について

予習をすることで自分の見るべきポイントが押さえられた状態，これが講義を受ける前に必要な準備です。それができている状態で授業を見て，先生がこの問題を通じて何を伝えたいのかを感じとってください。問題が掲載されているページはすべて見開きの構成となっており，余白（「Note」欄）がふんだんに用意されています。ここには何でも「自由」に書いて残すことができます。「自由」とはどういうことか。　それは，このスペースに画面上の黒板に書かれたことを「書き写すのみ」に留まることは厳禁，ということです。授業時間は限られていま

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

すから，先生はすべてを黒板に書くことはしていません。よって，授業を聞き，先生が話したことや自分なりに感じとったことを記しておくべきなのです。きれいにまとめても誰も見てくれませんよ。あくまで「Note」＝「記録」です。後から見て自分だけがわかる程度でいいのです。

ちなみにここまでの人生で書く速度を速くする努力をしてこなかった人へ。この講座はいつでも止めたり戻ったりできます。もちろん，聞きながら書くという訓練はこれからでも遅くありません。ちなみに止められるからといって「考えすぎ」は逆に厳禁です。あなた方に残された時間は限られています。勉強は数学だけじゃないでしょう？　大枠をとらえた上で，細かいところに後からこだわる姿勢も大事です。もちろんそれでも「今日はこれを解決しないと眠れない！」という人…。明日は寝不足で学校に行くことになるかもしれませんが，先生がとことんお付き合いします。そんな日も時にはあっていいのかもしれませんね。

ちなみに各講義を通じ，この問題から得られることを「Point Pickup」と題して簡潔にお伝えいたします。これもテキストに残しておきましょう。

③　復習について　その１

まずは問題によって語られた「ストーリー」を，テキストの問題や Point Pickup を見ながらもう一度頭に描いてみましょう。もし思い出せない場面があったらノートを見てみましょう。そしてそこで描いた世界観を元に，次に自分で実際に問題を解いてみましょう。予習と異なり，ここでは計算も含め実際にていねいに記述していきましょう。もし全然歯がたたない場合は，もう一度講座を視聴することをお勧めします。

もちろん数学という科目の特性上，あなたの技術力の不足などで途中で止まってしまうかもしれません。また，あなたの想いをどう記述で表現していいかわからない場合もあるかもしれません。安心してください。すべての問題に「模範解答」がついています。必要に応じ，画面を見る，またはプリントアウトして参考にしてください。

講義問題の復習をこのように欠かすことなく行い，解答を自分で書き上げることができた時が，先生から得たものが自分のものになった瞬間です。こうして書き上げた答案を，テキストと一緒に保存しておきましょう。

また１回の復習で納得のいくものが書けないケースもあるかと思います。そういった場合は，時間をおいて今一度問題を解き直すことをお勧めします。チャンスは「空き時間」「隙間時間」です。一度自分で取り組んだことは，次は確実に速度と正確性が上がります。それを実感することも成長の糧となるでしょう。

④　復習について　その２

③が終わったら，新たな問題にチャレンジしたくなるでしょう。「練習問題」が各講２題ずつ用意してあります。講義の問題に関連する問題もあれば，発展的な内容もあります。また問題によって難易度もさまざまです。

解き終えたら，「解答」を見て自分の到達具合をチェックしてみましょう。解答にはワンポ

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

イントのコメントもついています。この「練習問題」もまた，皆さんの成長のために厳選した問題です。より理解を深めていただきたく思います。

以上を確実に繰り返すことにより，確実に「自分で考える」領域に至ることができます。それはもしかしたら自分の力だけで到達したかもしれない領域です。しかし，もしそうであったとしても，そこに至る確実性の高いものがあるとしたら，それを選択することによって浮いた時間や労力をほかの学習に回すことができるでしょう。この講義がそういう目的をかなえるための存在であること，それは繰り返しますがサイクルを確実に構築した人だけがわかることです。皆さんの日々の努力，期待しています。

☆数学ⅠAⅡB 「おすすめの参考書」☆

この講義と同時並行で進めると効果的な書籍を以下に挙げておきます。学校の授業で課せられた課題などとのバランスを見ながら，着々と進めていきましょう。

ちなみに数学の日々の自主学習において，詳細な解答がないものはまったくお勧めできません。答に行き着く「プロセス」が数学であることは前述した通りです。最後の「答」しかない問題集やプリントではお話になりません。自分で考えれば必ず答にたどり着く！とおっしゃられる方もおりますが,「各知識の欠如」「時間の制約」「経験不足」「他教科とのバランス」がまったく考慮されておらず,「自分ができる（できてきた）ことは他人もできるはず」という無責任な発言とも言えましょう。受験勉強, 特に受験が近づいてきている時期に求められるのは,「時間対効果」です。

よい道筋を参考に，自分で切り開く時の「道標」とする。以下に挙げるのはそんな本です。また，センター試験の勉強に本格的に入ると，数学の記述力が確実に落ちます。良問を通じた日々のたゆまぬ記述訓練がそれを防ぐことになるでしょう。

【入試突破のための基礎固め】

・「１対１対応の演習」（東京出版）

例題を元に，入試の典型的解法を身につけることができます。Ⅰ・A・Ⅱ・B・Ⅲ・Cの全６冊です。教科書およびチャート式などの参考書で積み上げてきた知識をもう一歩上の実力に上げるための本です。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

【入試問題集】

・新数学スタンダード演習ⅠAⅡB　(東京出版)

入試の典型問題を網羅したものです。分野別となっていて，日々のペースメーカーに最適です。「大学への数学」という月刊誌の４月増刊号です。

増刊号ですから，入試が近づくにつれて各書店の在庫がなくなりますので注意してください。

・理系数学の良問プラチカ　数学ⅠAⅡB　(河合塾 SERIES)

良問と詳細な解説が掲載されており，自主学習に適しています。ちなみに「文系数学の良問プラチカ」は，この「理系数学」よりレベルが高いため最初に手をつけないように！

・北海道大学　赤本　(教学社)

有名な過去問題集です。第一志望が決定したら購入しておきましょう。傾向を知る，というより近年こういうレベルの問題が出ている，ということを肌で感じることができます。

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第１講　２次関数・方程式・不等式

1　変数 x が $x^2+bx \leqq -x$ 　$(b<-1)$ を満たすとき，x^2+bx の最小値が $-\dfrac{1}{2}$ であるようにbの値を定めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　x に関する 2 次不等式

$$p\{x^2-(p^2+p+2)x+p^3+2p^2\} \leqq 0$$

を満足する x の最大値が 3 となるように p を定めよ.

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　α，β を $0<\alpha<\beta<2$ を満たす実数とし，$0 \leqq x \leqq 2$ の範囲で定義された関数 $f(x)$ を $f(x)=|(x-\alpha)(x-\beta)|$ とする．

(1)　$f(x)$ の最大値を M とする．$f(x)=M$ となる x がちょうど3つあるとき，実数 α，β と M の値を求めよ．

(2)　(1)で求めた α，β について，$f(x)-mx=0$ が異なる3つの解をもつような実数 m の値の範囲を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第２講　場合の数・確率

1　[1]　A，B，C の 3 人が次のように勝負をくり返す．1 回目には A と B の間で硬貨投げにより勝敗を決める．2 回目以降には，直前の回の勝者と参加しなかった残りの 1 人との間で，やはり硬貨投げにより勝敗を決める．この勝負を繰り返し，誰かが 2 連勝するか，または，100 回目の勝負を終えたとき，終了する．ただし，硬貨投げで勝つ確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ である．

(1)　4 回以内の勝負で A が 2 連勝する確率を求めよ．

(2)　$n=2, 3, \cdots\cdots, 100$ とする．n 回以内の勝負で，A，B，C のうち誰かが 2 連勝する確率を求めよ．

[2]　1 から 4 までの番号を 1 つずつ書いた 4 枚のカードがある．この中から 1 枚を抜き取り，番号を記録してもとに戻す．これを n 回繰り返したとき，記録された n 個の数の積が 3 の倍数である確率を a_n，4 の倍数である確率を b_n とおく．このとき，a_n と b_n を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 4枚のカードがあって，1から4までの整数がひとつずつ書かれている．このカードをよく混ぜて，1枚引いては数字を記録し，カードをもとに戻す．この試行を n 回繰り返し，記録した順に数字を並べて得られる数列を，a_1，a_2，……，a_n とする．

(1) 条件 $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots\cdots \leqq a_n = j$ を満たす数列が $A_n(j)$ 通りあるとする．ただし，$j=1,\ 2,\ 3,\ 4$ とする．

(i) $A_n(1)$，$A_n(2)$ を求めよ．

(ii) $n \geqq 2$ のとき，$A_n(j)\ (j=3,\ 4)$ を $A_{n-1}(1),\ A_{n-1}(2),\ \cdots\cdots,\ A_{n-1}(j)$ で表し，$A_n(3)$，$A_n(4)$ を求めよ．

(2) $n \geqq 2$ のとき，$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots\cdots \leqq a_{n-1}$ かつ $a_{n-1} > a_n$ となる確率を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　1 から n $(n \geqq 3)$ までの自然数を 1 つずつ書いた n 枚のカードがある．その中から，でたらめに 3 枚のカードを同時に取りだすとき，それら 3 枚のカードに書いてある数の中で 1 番小さい数を X_1，2 番目に小さい数を X_2，残りの数を X_3 とする．さらに，$Y=X_3-X_1$ とする．

(1)　$n=5$ のとき，$X_2>Y$ となる確率を求めよ．

(2)　一般の n に対し，$Y=k$ となる確率 $P(Y=k)$ $(k=2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n-1)$ と Y の期待値 $E(Y)$ を求めよ．ただし，必要なら $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ を用いてもよい．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第３講　三角・指数・対数関数

1　平面上の４点 O(0, 0), A(0, 3), B(1, 0), C(3, 0) について，次の問いに答えよ.

(1)　$\sin \angle BAC$ を求めよ.

(2)　点 P が線分 OA 上を動くとき，$\sin \angle BPC$ の最大値とそれを与える点 P の座標を求めよ.

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　x に関する 2 つの不等式

$$1+\frac{1}{\log_3 x}-\frac{2}{\log_5 x}<0 \quad \cdots\cdots①$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{a\log_3 2}<\left(\frac{1}{2}\right)^{x(x-a+1)} \quad \cdots\cdots②$$

について，次の問に答えよ．ただし，a は実数とする．

(1)　①を解け．

(2)　①の解がすべて②を満たすような a の値の範囲を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　$e=2.718$ とする．e^e に最も近い整数を求めよ．必要ならば次の近似値を用いよ．
$\log_e 2=0.693$，$\log_e 3=1.099$，$\log_e 5=1.609$

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第4講　図形と方程式

1　xy 平面上の円 $x^2+y^2=1$ へ，この円の外部の点 P$(a,\ b)$ から2本の接線を引き，その接点を A，B とし，線分 AB の中点を Q とする．

(1)　点 Q の座標を a，b を用いて表せ．

(2)　点 P が円 $(x-3)^2+y^2=1$ の上を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　x の2次関数 $f(x)=x^2+ax+b$ の最小値を M とする．$0 \leqq f(0) \leqq 5$，$1 \leqq f(1) \leqq 3$ であるとき，M の最大値と最小値，およびそれらを与える x の値を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　xy 平面上の放物線

$$A : y = x^2,\ B : y = -(x-a)^2 + b$$

は異なる 2 点 $P(x_1,\ y_1)$，$Q(x_2,\ y_2)$　$(x_1 > x_2)$ で交わるとする．

(1)　$x_1 - x_2 = 2$ が成り立つとき，b を a で表せ．

(2)　$x_1 - x_2 = 2$ を満たしながら a，b が変化するとき，直線 PQ の通過する領域を求め，図示せよ．

(3)　$PQ = 2$ を満たしながら a，b が変化するとき，線分 PQ の中点の y 座標の最小値を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第５講　微分法，積分法①

1　曲線 $y = x^3$ について

(1)　この曲線上の相異なる３点 $A(a,\ a^3)$，$B(b,\ b^3)$，$C(c,\ c^3)$ が同一直線上にあるための a，b，c の条件を求めよ．

(2)　点 $P(\alpha,\ \beta)$ よりこの曲線に相異なる３本の接線が引けるとき，α，β の条件を求め，点 $P(\alpha,\ \beta)$ の存在範囲を図示せよ．

(3)　(2)のとき，３つの接点を頂点とする三角形の重心の座標を α，β を用いて表せ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　正の数 a に対し，関数

$$y = x^2 - ax \quad \left(\frac{a}{6} \leqq x \leqq \frac{5a}{6}\right)$$

のグラフを C とする．長方形 T で１辺が x 軸に含まれ，その対辺の両端が C 上にあるものをすべて考える．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　長方形 T の周の長さの最大値を，a を用いて表せ．

(2)　長方形 T の面積の最大値を，a を用いて表せ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　[1]　$f(x)=\int_0^2 |t(t-x)|dt$ について

（1）$0 \leqq x \leqq 2$ のとき，$f(x)$ を求めよ．

（2）$\int_{-1}^{2} f(x+1)dx$ を求めよ．

[2]　$f(x)=4x^2-3ax+4\int_0^1 tf(t)dt$，$g(x)+\int_0^x (t+1)g'(t)dt=x^2+4x+a$ のとき

（1）$f(x)$ と $g(x)$ を求めよ．

（2）方程式 $f(x)-xg(x)=0$ の 2 解を α，β として，

$$h(a)=\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta (3x^2-2ax+a^2)dx$$ の最小値を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第6講　微分法，積分法②

1　次の問いに答えよ．

(1)　x についての2次方程式 $x^2-2kx-3k^2+1=0$ が虚数解をもつような実数 k の値の範囲を求めよ．

(2)　(1)で求めた k の範囲で $F(k)=\int_0^k(x^2-2kx-3k^2+1)dx$ の最小値と最大値を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 中心 $(0,\ 1)$，半径 1 の円を C，放物線 $y=x^2$ を C_1 とする．また，円 C 上に頂点 A をもつ放物線 $y=-(x-p)^2+q$ を C_2 とする．

(1) C_2 の頂点 A が $(0,\ 0)$ 以外にあるとき，C_1 と C_2 は異なる 2 点で交わることを示せ．

(2) C_1 と C_2 によって囲まれる図形の面積を S とする．C_2 の頂点 A が円 C 上を動くとき，S の最大値と，そのときの A の座標を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 直線 $y=x$ を l，放物線 $y=x^2+1$ を C とする．

(1) l 上の任意の点Pから C に2本の接線が引けることを示せ．

(2) (1)の2本の接線と C で囲まれる部分の面積を S，接点の x 座標を α，β $(\alpha<\beta)$ とする．Pが l 上を動くとき，$\dfrac{S}{\beta-\alpha}$ の最小値を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第７講　ベクトル

1　三角形 ABC があって，$AB=2$，$AC=\sqrt{3}$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3$ である．

(1)　三角形 ABC の内接円の半径を求めよ．

(2)　三角形 ABC の内心を I とする．$\overrightarrow{AI}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ と表すとき，x，y の値を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　三角形 ABC の辺の長さをそれぞれ AB＝6，BC＝ $2\sqrt{13}$，CA＝8 とする．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を求めよ．

(2)　三角形 ABC の外心を O とする．$\overrightarrow{\mathrm{AO}}=l\overrightarrow{\mathrm{AB}}+m\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と表すとき，l，m の値を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 空間内の 4 点 O(0, 0, 0), A(−1, 1, 0), B(1, 0, 0), C(0, 1, 1) をとる.

(1) 直線 OA 上の点 H をとって CH と OA が垂直であるようにする. H の座標を求めよ. また, C′(0, 1, 0), $\angle \mathrm{CHC'} = \theta$ として $\cos\theta$ の値を求めよ.

(2) 直線 OA 上の点 P と直線 BC 上の点 Q との距離 PQ が最小となる P, Q の座標を求めよ.

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第８講　数列

1　［1］　3 辺の長さがいずれも 70 より小さい整数で，かつ等差数列になっている三角形は何個あるか．ただし，合同な三角形は区別しないものとする．

［2］　$(1+x)(1+3x)(1+5x)\cdots\cdots\{1+(2n-1)x\}$ を展開したときの x^2 の係数を求めよ．

【Point Pickup】

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 r を 0 でない実数とする．数列 $\{a_n\}$ を $a_1=r$，$a_n=r+\dfrac{1}{r}a_{n-1}$　$(n\geqq 2)$ で定める．

(1)　a_n を求めよ．

(2)　$b_1=r$，$b_n=a_n+b_{n-1}$　$(n\geqq 2)$ を満たす数列 $\{b_n\}$ の第 n 項を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　n は 2 以上の自然数とする．数学的帰納法を用いて次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2$$

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第９講　総合問題(1)

1　x についての２次方程式 $x^2-2px+p^2-2p-1=0$ の２つの解を α，β とする．
$\dfrac{(\alpha-\beta)^2-2}{2\{(\alpha+\beta)^2+2\}}$ が整数となる実数 p をすべて求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　m を 2 より大きい実数とする．x についての 2 つの方程式

$x^2-2^{m+1}x+3\cdot 2^m=0$　……①

$2\log_2 x-\log_2(x-1)=m$　……②

について，次の問いに答えよ．

(1)　方程式①，②ともに 2 つの異なる実数解をもつことを示せ．

(2)　方程式①の解のうち，ちょうど 1 つだけが方程式②の 2 つの解の間にあることを示せ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 ある人がサイコロを振る試行によって，部屋 A，B を移動する．サイコロの目の数が 1，3 のときに限り部屋を移る．また各試行の結果，部屋 A に居る場合はその人の持ち点に 1 点を加え，部屋 B に居る場合は 1 点を減らす．持ち点は負になることもあるとする．第 n 試行の結果，部屋 A，B に居る確率をそれぞれ $P_A(n)$，$P_B(n)$ と表す．最初にその人は部屋 A に居るものとし（つまり，$P_A(0)=1$，$P_B(0)=0$ とする），持ち点は 1 とする．

(1) $P_A(1)$，$P_A(2)$，$P_A(3)$ および $P_B(1)$，$P_B(2)$，$P_B(3)$ を求めよ．また，第 3 試行の結果，その人が得る持ち点の期待値 $E(3)$ を求めよ．

(2) $P_A(n+1)$，$P_B(n+1)$ を $P_A(n)$，$P_B(n)$ を用いて表せ．

(3) $P_A(n)$，$P_B(n)$ を n を用いて表せ．

(4) 第 n 試行の結果，その人が得る持ち点の期待値 $E(n)$ を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第10講　総合問題(2)

1　xy 平面上の 2 直線 L_1，L_2 を $L_1 : y=0$　(x 軸)，$L_2 : y=\sqrt{3}\,x$ で定める．P を xy 平面上の点とする．直線 L_1 に関して P と対称な点を Q，直線 L_2 に関して P と対称な点を R とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　P の座標を $(a,\ b)$ とするとき，R の座標を a，b を用いて表せ．

(2)　2 点 Q，R の距離が 2 になるような P の軌跡 C を求めよ．

(3)　点 P が C 上を動くとき，三角形 PQR の面積の最大値とそれを与える P の座標を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 放物線 $y=x^2$ 上に2定点A，Bがある．Pは放物線上でAとBの間にある点で，放物線と線分APとで囲まれる図形の面積 S_1 と，放物線と線分PBとで囲まれる図形の面積 S_2 との和が最小になるようにとった点である．

(1) S_1 と S_2 の比を求めよ．

(2) 点Pでの放物線の接線に垂直な直線と，A，Bを通る直線とのなす角を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　関数 $f(x)=x^3-x+\dfrac{2}{3}$ について，次の問いに答えよ．

(1)　$f(x)$ が減少しない x の範囲を求めよ．

(2)　点Pが曲線 $y=f(x)$ 上を動くとき，x 軸の正の方向と点Pにおけるこの曲線の接線のなす角を θ とする．θ のとりうる値の範囲を求めよ．ただし，$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする．

(3)　n を正の整数とし，$n \leqq x < n+1$ の範囲で $f(x)$ の値が整数となる x の個数を a_n とする．a_n を n を用いて表し，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$ を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

北海道大学

数学ⅠAⅡB対策講座

練習問題

北大数学ⅠAⅡB　　第1講　2次関数・方程式・不等式　練習問題

1 m を実数として，次の2次不等式について考える．$x^2-mx+(m-1)\leqq 0$ …①

以下の問いに答えなさい．

(1) 不等式①を満たす整数 x の個数がちょうど3個であるような実数 m の値の範囲を求めなさい．

(2) 不等式①を満たす整数 x の個数を $N(m)$ で表すことにする．m が整数のとき，$N(m)$ を m を用いて表しなさい．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 (1) 関数 $y=|x^2-2x-3|$ のグラフをかけ.

(2) m を実数とする．このとき，方程式 $||x^2-2x-3|-m|=2$ の実数解の個数を求めよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　次のようなコイン投げのゲームを行う．はじめに3枚のコインを投げ，表の出たコインがあれば，2回目には，表の出たコインのみを投げる．3回目以降も同様に投げることとする．こうして，ある回で裏のみが出たところで，このゲームは終了となる．このとき，以下となる確率をそれぞれ求めよ．

(1)　1回目でゲームが終了しない．

(2)　2回投げてもゲームが終了しない．

(3)　2回目で表が1枚だけ出る．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　箱の中に, 1 から 9 までの番号を 1 つずつ書いた 9 枚のカードが入っている．ただし，異なるカードには異なる番号が書かれているものとする．この箱から 2 枚のカードを同時に選び，小さいほうの数を A とする．これらのカードを箱に戻して，再び 2 枚のカードを同時に選び，小さいほうの数を B とする．A＝B である確率を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　座標平面上の原点Oを中心とする半径1の円周上に，点Aがある．ただし，Aは第1象限の点である．点Aから x 軸に下ろした垂線と x 軸との交点をB，線分ABを2：1に内分する点をCとする．$\theta = \angle AOB$ のときの $\tan\angle BOC$ と $\tan\angle COA$ の値をそれぞれ $f(\theta)$，$g(\theta)$ とおく．以下の問いに答えよ．

(1)　$f(\theta)$ と $g(\theta)$ を θ を用いて表せ．

(2)　$g(\theta)$ の $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ における最大値と，そのときの θ の値を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 ［1］ $x>0$，$y>0$，$z>0$ であり，$xyz^3=1000$，$x^2yz=10$ が成り立つとき，
$L=(\log_{10}y)(\log_{10}x+8)$ の最大値を求めよ．

［2］ $x\geqq 1$，$y\geqq 1$ で $(\log_2 x)^2+(\log_2 y)^2=4$ のとき，xy の最大値と最小値を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　実数 t は $t>1$ を満たすとする．点 $\left(\dfrac{1}{2},\ t\right)$ から，円 $x^2+y^2=1$ に相異なる2本の接線を引き，2つの接点を通る直線を m とする．

(1)　直線 m の方程式を t を用いて表せ．

(2)　t を $t>1$ の範囲で動かすとき，t によらず m が通る点がある．この点の座標を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　O を原点とする xy 平面において，直線 $y=1$ の $|x|\geqq 1$ を満たす部分を D とする．

(1)　D 上に点 $\mathrm{A}(t,\ 1)$ をとるとき，線分 OA の垂直二等分線の方程式を求めよ．

(2)　点 A が D 全体を動くとき，線分 OA の垂直二等分線が通過する範囲を求め，それを図示せよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　a を実数とし，$f(x)=x^3-3ax^2+2x+2$ とする．次の問いに答えよ．

(1)　xy 平面において曲線 $y=f(x)$ の接線で傾きが m であるものが2本引けるとき，m の値の範囲を求めよ．

(2)　m が(1)で求めた範囲にあるとき，曲線 $y=f(x)$ の傾きが m である2本の接線の接点をそれぞれP，Qとする．線分PQの中点Rの座標を求めよ．また，a がすべての実数値をとるとき，点Rが描く軌跡を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ を $f(x)=3\int_{x-1}^{x}(s+|s|)(s+|s|-1)\,ds$ によって定める.

(1)　$f(x)$ を x の値について場合分けをして，x の多項式で表せ.

(2)　座標平面上に $y=f(x)$ のグラフをかけ.

(3)　x がすべての実数を動くときの $f(x)$ の最小値を求めよ.

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　放物線 $C_1 : y = x^2$ と定点 A$(a,\ b)$（ただし，$a^2 < b$）を通る放物線 C_2：
$y = -3x^2 + 2px + q$ の交点をP，Qとする．点P，Qの x 座標をそれぞれ α，β（ただし，$\alpha < \beta$）とする．2つの放物線 C_1，C_2 で囲まれた図形の面積を S とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　S を a，b，p を用いて表せ．

(2)　S を最小にする p とその最小値を a，b を用いて表せ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 放物線 $C: y=\frac{1}{2}x^2$ 上に2点 $\mathrm{P}(2p,\ 2p^2)$，$\mathrm{Q}(2q,\ 2q^2)$ がある．ただし，$p<q$ である．点Pにおける接線と点Qにおける接線の交点を $\mathrm{R}(\alpha,\ \beta)$ とする．また，放物線 C と2直線PR，QRで囲まれる部分の面積を S とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) α，β を p，q を用いて表せ．

(2) S を p，q を用いて表せ．

(3) $S=9$ かつ $\mathrm{PR}\perp\mathrm{QR}$ のとき，α，β の値を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　三角形ABCは $|\overrightarrow{AB}|=6$, $|\overrightarrow{AC}|=3$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2$ を満たしている．三角形ABCの重心をGとし，線分ABの中点をMとする．以下の問いに答えなさい．

(1) 線分MGの長さを求めなさい．

(2) $\angle$AMGの二等分線と線分AGとの交点をNとするとき，線分ANの長さを求めなさい．

(3) 三角形AMGの内心をIとするとき，$\overrightarrow{AI}$ を $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ を用いて表しなさい．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　座標空間の 3 点 A(1, 2, 2), B(2, 1, 1), C(2, 4, 2) を通る平面を Z とする．点 D(0, 2, 1) を通り，ベクトル $\vec{a}=(1,\ 1,\ 1)$ に平行な直線を l_1 とする．また点 D を通り，ベクトル $\vec{b}=(-1,\ -1,\ 1)$ に平行な直線を l_2 とする．このとき，以下の問いに答えなさい．

(1)　l_1 と Z の交点を E とし，l_2 と Z の交点を F とする．E，F の座標を求めなさい．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ のなす角を θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とおくとき，$\cos\theta$ の値を求めなさい．

(3)　三角形 DEF の面積を求めなさい．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　数列 $\{a_n\}$ は次のように定められている．初項 $a_1=0$ であり，すべての自然数 n に対して

$$a_{n+1}=-a_n+\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}$$ が成り立つ．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　a_3，a_4 を求めよ．

(2)　α を定数として $b_n=(-1)^n(a_n+\alpha)$ とおく．$\{b_n\}$ が等差数列になるためには α をどのように定めればよいか．α の値を求めよ．

(3)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を n を用いて表せ．

(4)　数列 $\{a_n\}$ の第 $2n$ 項までの2乗の和 $S_{2n}={a_1}^2+{a_2}^2+\cdots\cdots+{a_{2n}}^2$ を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　n は 2 以上の整数であり，$\dfrac{1}{2}<a_j<1$　$(j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ とする．このとき，不等式

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots\cdots(1-a_n)>1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots\cdots+\frac{a_n}{2^{n-1}}\right)$$

が成り立つことを示せ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　等式 $|x-2y|=y+\sqrt{1-x}+1$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　コインを投げ，点Pを次の規則によって正三角形ABCの頂点A, B, C上を動かす．点PがAにあるときは，表が出たらBに動かし，裏が出たらCに動かす．Bにあるときは，表が出たらCに動かし，裏が出たらAに動かす．Cにあるときは，表が出たらAに動かし，裏が出たらBに動かす．

はじめは点PはAにあるとし，コインをn回投げた後にPがAにある確率をa_n，Bにある確率をb_n，Cにある確率をc_nとする．

(1)　a_{n+1}，b_{n+1}，c_{n+1}をそれぞれa_n，b_n，c_nを用いて表せ．

(2)　a_nを求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1 円 C_1：$x^2+y^2=25$ と円 C_2：$(x-10)^2+(y-5)^2=50$ の2つの交点と原点を通る円を C とする．次の問いに答えよ．

(1) 円 C の中心と半径を求めよ．

(2) 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が円 C 上を動くとき，$2y-x$ の最大値を求めよ．

(3) 円 C_1 と円 C_2 の2つの交点を通る円の中心の軌跡を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 放物線 C：$y=x^2-4x+3$ と直線 l：$y=mx-m$ を考える．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 放物線 C と直線 l が接するときの m の値 m_0 を求めよ．

(2) $m>m_0$ とする．放物線 C と直線 l および y 軸で囲まれた図形の面積を D_1 とし，放物線 C と直線 l で囲まれた図形の面積を D_2 とする．D_1 と D_2 をそれぞれ m を用いて表せ．

(3) $m>m_0$ における D_2-2D_1 の最小値，およびそのときの m の値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

北海道大学

数学ⅠAⅡB対策講座

解　答

テキスト解答

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第１講　２次関数・方程式・不等式

<table><tr><td>

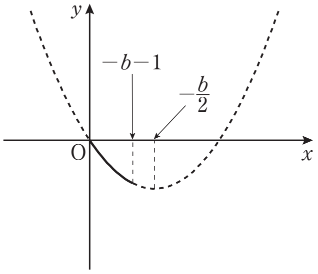
$\boxed{1}$　変数 x が $x^2+bx \leqq -x$　$(b<-1)$ を満たすとき，x^2+bx の最小値が $-\dfrac{1}{2}$ であるように b の値を定めよ．

</td></tr></table>

$x^2+bx \leqq -x$　より　$x^2+(b+1)x \leqq 0$　であるから　$x\{x-(-b-1)\} \leqq 0$

$b<-1$ より　$-b-1>0$　よって　$0 \leqq x \leqq -b-1$　……①

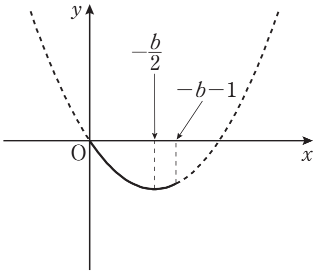
ここで，$f(x)=x^2+bx=\left(x+\dfrac{b}{2}\right)^2-\dfrac{b^2}{4}$ とおき，①の範囲における $f(x)$ の最小値を求める．



(i)　$-b-1<-\dfrac{b}{2}$　つまり　$-2<b<-1$ のとき

$f(x)$ の最小値は $f(-b-1)=(-b-1)^2+b(-b-1)=b+1$

よって　$b+1=-\dfrac{1}{2}$　　$b=-\dfrac{3}{2}$（$-2<b<-1$ を満たす）



(ii)　$-\dfrac{b}{2} \leqq -b-1$　つまり　$b \leqq -2$ のとき

$f(x)$ の最小値は　$f\left(-\dfrac{b}{2}\right)=-\dfrac{b^2}{4}$

よって　$-\dfrac{b^2}{4}=-\dfrac{1}{2}$　　$b=\pm\sqrt{2}$

これらは $b \leqq -2$ を満たさず不適.

(i)(ii)より　$\boldsymbol{b=-\dfrac{3}{2}}$

<table><tr><td>

$\boxed{2}$　x に関する２次不等式 $p\{x^2-(p^2+p+2)x+p^3+2p^2\} \leqq 0$ を満足する x の最大値が３となるように p を定めよ．

</td></tr></table>

$$p\{x^2-(p^2+p+2)x+p^3+2p^2\} \leqq 0$$
$$p\{x^2-(p^2+p+2)x+p^2(p+2)\} \leqq 0$$
$$p(x-p^2)\{x-(p+2)\} \leqq 0$$

この不等式を満足させる x の値の最大値が存在するためには，$p>0$ であることが必要である.

このとき　$(x-p^2)\{x-(p+2)\} \leqq 0$　　これを満足する x の値の最大値を考える.

$p^2<p+2$　を整理して　$(p+1)(p-2)<0$ より

(i)　$0<p<2$ のとき　$p^2 \leqq x \leqq p+2$　　よって　$p+2=3$　　$p=1$（$0<p<2$ を満たす）

(ii)　$p=2$ のとき　$x=p^2=p+2=4$　　これは x の最大値が３であることを満たさず不適.

(iii)　$p>2$ のとき　$p+2 \leqq x \leqq p^2$　　よって　$p^2=3$　　$p=\pm\sqrt{3}$

これは $p>2$ を満たさず不適.

(i)～(iii)より　$\boldsymbol{p=1}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　α，β を $0<\alpha<\beta<2$ を満たす実数とし，$0 \leqq x \leqq 2$ の範囲で定義された関数 $f(x)$ を $f(x)=|(x-\alpha)(x-\beta)|$ とする．

(1)　$f(x)$ の最大値を M とする．$f(x)=M$ となる x がちょうど3つあるとき，実数 α，β と M の値を求めよ．

(2)　(1)で求めた α，β について，$f(x)-mx=0$ が異なる3つの解をもつような実数 m の値の範囲を求めよ．

(1)　$(x-\alpha)(x-\beta)=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=\left(x-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\dfrac{(\alpha+\beta)^2}{4}+\alpha\beta$

グラフの対称性を考えると，$0 \leqq x \leqq 2$ の変域に $f(x)=M$ となる x がちょうど3つあるのは，$\dfrac{\alpha+\beta}{2}=1$　かつ　$f(0)=f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)(=f(2))=M$　のときである．

それは，$\alpha+\beta=2$　…①　かつ　$\alpha\beta=\dfrac{(\alpha+\beta)^2}{4}-\alpha\beta=M$　より

$\alpha\beta=\dfrac{1}{2}$　…②　　$\boldsymbol{M=\dfrac{1}{2}}$　のとき

①，②より，α，β は2次方程式　$x^2-2x+\dfrac{1}{2}=0$　の2解である．$2x^2-4x+1=0$ を解いて

$\alpha<\beta$ より　$\boldsymbol{\alpha=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}}$，$\boldsymbol{\beta=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}}$

(2)　$f(x)-mx=0$ より，$f(x)=mx$．$y=f(x)$ と $y=mx$（原点通る傾き m の直線）が3つの共有点をもつときの m の範囲を求める．

$y=mx$ が $\left(2,\ \dfrac{1}{2}\right)$ を通るとき　$m=\dfrac{1}{4}$

$y=mx$ が $y=-x^2+2x-\dfrac{1}{2}$ と接するとき，2式より y を消去し，x について整理した2次方程式　$2x^2-2(2-m)x+1=0$　が重解をもつ．

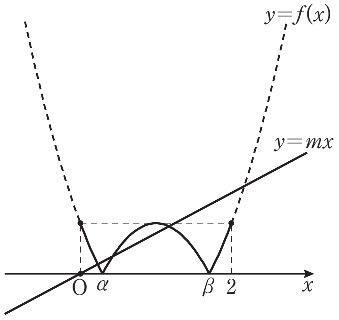
よって，判別式 D について

$\dfrac{D}{4}=(m-2)^2-2=0$　より　$m=2\pm\sqrt{2}$

$m=2+\sqrt{2}$ のとき，重解　$x=\dfrac{2-m}{2}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

これは $\alpha \leqq x \leqq \beta$ を満たさず不適．

$m=2-\sqrt{2}$ のとき，重解　$x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　をもち適する．



以上の結果とグラフより，求める m の範囲は　$\boldsymbol{\dfrac{1}{4}<m<2-\sqrt{2}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第２講　場合の数・確率

1　［1］　A，B，Cの３人が次のように勝負をくり返す．１回目にはAとBの間で硬貨投げにより勝敗を決める．２回目以降には，直前の回の勝者と参加しなかった残りの１人との間で，やはり硬貨投げにより勝敗を決める．この勝負を繰り返し，誰かが２連勝するか，または，100回目の勝負を終えたとき，終了する．ただし，硬貨投げで勝つ確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ である．

(1)　４回以内の勝負でAが２連勝する確率を求めよ．

(2)　$n=2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ 100$ とする．n 回以内の勝負で，A，B，Cのうち誰かが２連勝する確率を求めよ．

(1)　４回以内の勝負でAが２連勝するのは，勝者を順に列挙すると，AAまたはBCAAの場合のみ．

よって，求める確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^4=\boldsymbol{\frac{5}{16}}$

(2)　n 回以内にA，B，Cが３人の誰も２連勝しないのは，２回目〜 n 回目の各回においてその前の回に参加しなかった人が勝つ場合（１回目はA，Bのどちらが勝ってもよい）であり，その確率は

$$1\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2^{n-1}}$$

したがって，求める確率は $\boldsymbol{1-\frac{1}{2^{n-1}}}$

1　［2］　１から４までの番号を１つずつ書いた４枚のカードがある．この中から１枚を抜き取り，番号を記録してもとに戻す．これを n 回繰り返したとき，記録された n 個の数の積が３の倍数である確率を a_n，４の倍数である確率を b_n とおく．このとき，a_n と b_n を求めよ．

n 個の数の積が３の倍数になるのは，n 個の数の中に少なくとも１個３が含まれるときである．それは，３が１個も含まれないことの余事象であるから

$$a_n=\boldsymbol{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

n 個の数の積が４の倍数にならないのは

(i)　n 個とも１または３

(ii)　n 個のうち，１個が２，残り $n-1$ 個が１または３

のいずれかである．

$$b_n=1-\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n+{}_n\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=\boldsymbol{1-\frac{n+2}{2^{n+1}}}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　4枚のカードがあって，1から4までの整数がひとつずつ書かれている．このカードをよく混ぜて，1枚引いては数字を記録し，カードをもとに戻す．この試行を n 回繰り返し，記録した順に数字を並べて得られる数列を，a_1，a_2，……，a_n とする．

(1)　条件 $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots\cdots \leqq a_n = j$ を満たす数列が $A_n(j)$ 通りあるとする．ただし，$j=1,\ 2,\ 3,\ 4$ とする．

(i)　$A_n(1)$，$A_n(2)$ を求めよ．

(ii)　$n \geqq 2$ のとき，$A_n(j)$ $(j=3,\ 4)$ を $A_{n-1}(1), A_{n-1}(2), \cdots\cdots, A_{n-1}(j)$ で表し，$A_n(3)$，$A_n(4)$ を求めよ．

(2)　$n \geqq 2$ のとき，$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots\cdots \leqq a_{n-1}$ かつ $a_{n-1} > a_n$ となる確率を求めよ．

(1)　(i)　$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots\cdots \leqq a_n = 1$ となるのは，$a_1 = a_2 = \cdots\cdots = a_n = 1$ のときのみである．

よって　$A_n(1) = \mathbf{1}$

$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots\cdots \leqq a_n = 2$ となるのは

$a_1 = a_2 = \cdots\cdots = a_n = 2$

$a_1 = 1,\ a_2 = a_3 = \cdots\cdots = a_n = 2$

$a_1 = a_2 = 1,\ a_3 = a_4 = \cdots\cdots = a_n = 2$

⋮

$a_1 = a_2 = \cdots\cdots = a_{n-1} = 1,\ a_n = 2$　の n 通りである．

よって　$A_n(2) = \boldsymbol{n}$

(ii)　$n \geqq 2$ のとき，$A_n(j)$ $(j=3,\ 4)$ となるのは

$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots\cdots \leqq a_{n-1} = 1$　（$A_{n-1}(1)$ 通り）

$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots\cdots \leqq a_{n-1} = 2$　（$A_{n-1}(2)$ 通り）

⋮

$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots\cdots \leqq a_{n-1} = j$　（$A_{n-1}(j)$ 通り）で，かつ，それぞれで $a_n = j$ となる場合である．

よって　$A_n(j) = \boldsymbol{A_{n-1}(1) + A_{n-1}(2) + \cdots\cdots + A_{n-1}(j)}$

$j=3$ のとき，(i)の結果を利用して

$$A_n(3) = A_{n-1}(1) + A_{n-1}(2) + A_{n-1}(3) = 1 + (n-1) + A_{n-1}(3)$$
$$= A_{n-1}(3) + n$$

したがって　$A_{n+1}(3) = A_n(3) + (n+1)$ であり，$A_1(3) = 1$　（$a_1 = 3$ の1通り）であるから

$n \geqq 2$ のとき　$A_n(3) = A_1(3) + \sum_{k=1}^{n-1}(k+1) = 1 + \frac{1}{2}(n-1)n + (n-1) = \boldsymbol{\frac{1}{2}n(n+1)}$

$j=4$ のとき，(i)の結果を利用して

$$A_n(4) = A_{n-1}(1) + A_{n-1}(2) + A_{n-1}(3) + A_{n-1}(4) = 1 + (n-1) + \frac{1}{2}(n-1)n + A_{n-1}(4)$$
$$= A_{n-1}(4) + \frac{1}{2}n(n+1)$$

したがって　$A_{n+1}(4) = A_n(4) + \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ であり，$A_1(4) = 1$ であるから

$n \geqq 2$ のとき

$$A_n(4) = A_1(4) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$$=1+\frac{1}{12}(n-1)n(2n-1)+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+(n-1)=\boldsymbol{\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)}$$

(2)　この試行には全部で 4^n 通りの場合がある．

$n\geqq 2$ のとき，$a_1\leqq a_2\leqq\cdots\cdots\leqq a_{n-1}$　かつ　$a_{n-1}>a_n$　となるのは，

$a_1\leqq a_2\leqq\cdots\cdots\leqq a_{n-1}=j$ の $A_{n-1}(j)$ 通りに対し，$a_n=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ j-1$ の

$j-1$ 通りである．

よって，題意を満たす数列は

$$A_{n-1}(2)\cdot 1+A_{n-1}(3)\cdot 2+A_{n-1}(4)\cdot 3=(n-1)\cdot 1+\frac{1}{2}(n-1)n\cdot 2+\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)\cdot 3$$

$$=\frac{1}{2}(n-1)(n+1)(n+2)\text{（通り）}$$

ゆえに，求める確率は　$\boldsymbol{\dfrac{(n-1)(n+1)(n+2)}{2\cdot 4^n}}$

3　1 から n $(n\geqq 3)$ までの自然数を 1 つずつ書いた n 枚のカードがある．その中から，でたらめに 3 枚のカードを同時に取りだすとき，それら 3 枚のカードに書いてある数の中で 1 番小さい数を X_1，2 番目に小さい数を X_2，残りの数を X_3 とする．さらに，$Y=X_3-X_1$ とする．

(1)　$n=5$ のとき，$X_2>Y$ となる確率を求めよ．

(2)　一般の n に対し，$Y=k$ となる確率 $P(Y=k)$　$(k=2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n-1)$　と Y の期待値 $E(Y)$ を求めよ．ただし，必要なら $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ を用いてもよい．

(1)　$n=5$ のとき，カードの取り出し方は全部で ${}_5C_3=10$ 通り．

このうち，$X_2>Y$　つまり　$X_2>X_3-X_1$ より，$X_1+X_2>X_3$ を満たす X_1，X_2，X_3 の組は，$(X_1,\ X_2,\ X_3)=(2,\ 3,\ 4),\ (2,\ 4,\ 5),\ (3,\ 4,\ 5)$ の 3 通りのみである．

よって，求める確率は　$\boldsymbol{\dfrac{3}{10}}$

(2)　3 枚のカードの選び方は全部で，${}_nC_3=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$ 通り．

$Y=k$　つまり　$X_3-X_1=k$ より，$X_3=X_1+k$　ここで，$X_1\geqq 1$，$X_3\leqq n$ より

$1\leqq X_1\leqq n-k$

よって，X_1，X_3 の組は　$(X_1,\ X_3)=(1,\ 1+k),\ (2,\ 2+k),\ \cdots\cdots,\ (n-k,\ n)$ の $n-k$ 通り．

これらの組のそれぞれについて，X_2 の選び方は

$$X_1+1\leqq X_2\leqq X_3-1\quad\text{の}\quad (X_3-1)-(X_1+1)+1=X_3-X_1-1=k-1\text{（通り）}$$

よって　$P(Y=k)=\dfrac{(n-k)(k-1)}{{}_nC_3}=\boldsymbol{\dfrac{6(n-k)(k-1)}{n(n-1)(n-2)}}$

$$E(Y)=\sum_{k=2}^{n-1}k\cdot P(Y=k)=\sum_{k=1}^{n}k\cdot P(Y=k)\quad (P(Y=1)=P(Y=n)=0\text{ より})$$

$$=\frac{6}{n(n-1)(n-2)}\sum_{k=1}^{n}\{-k^3+(n+1)k^2-nk\}$$

$$=\frac{6}{n(n-1)(n-2)}\left\{-\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+(n+1)\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-n\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right\}=\boldsymbol{\frac{n+1}{2}}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第３講　三角・指数・対数関数

1　平面上の 4 点 O(0, 0), A(0, 3), B(1, 0), C(3, 0) について，次の問いに答えよ．

(1)　$\sin\angle\mathrm{BAC}$ を求めよ．

(2)　点 P が線分 OA 上を動くとき，$\sin\angle\mathrm{BPC}$ の最大値とそれを与える点 P の座標を求めよ．

(1)　△OAC は　OA＝OC＝3 の直角二等辺三角形より　$\angle\mathrm{OAC}=\dfrac{\pi}{4}$

また，△OAB において　OB=1 であるから，三平方の定理より，

$\mathrm{AB}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$ である．

よって　$$\begin{aligned}\sin\angle\mathrm{BAC}&=\sin(\angle\mathrm{OAC}-\angle\mathrm{OAB})\\&=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\angle\mathrm{OAB}\right)\\&=\sin\frac{\pi}{4}\cos\angle\mathrm{OAB}-\cos\frac{\pi}{4}\sin\angle\mathrm{OAB}\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{AB}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{AB}}\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{5}}}\end{aligned}$$

(2)　P(0, t)　($0<t\leqq 3$) とおく．($t=0$ は明らかに $\sin\angle\mathrm{BPC}$ を最大にする値ではない)

三平方の定理より $\mathrm{BP}=\sqrt{t^2+1}$，$\mathrm{CP}=\sqrt{t^2+9}$

よって　$$\begin{aligned}\sin\angle\mathrm{BPC}&=\sin(\angle\mathrm{OPC}-\angle\mathrm{OPB})\\&=\sin\angle\mathrm{OPC}\cos\angle\mathrm{OPB}-\cos\angle\mathrm{OPC}\sin\angle\mathrm{OPB}\\&=\frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{CP}}\cdot\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{BP}}-\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{CP}}\cdot\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{BP}}\\&=\frac{3}{\sqrt{t^2+9}}\cdot\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}-\frac{t}{\sqrt{t^2+9}}\cdot\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\\&=\frac{2t}{\sqrt{t^4+10t^2+9}}\\&=\frac{2}{\sqrt{t^2+10+\dfrac{9}{t^2}}}\end{aligned}$$

$t>0$ より　(相加平均)≧(相乗平均)　から

$$t^2+\frac{9}{t^2}+10\geqq 2\sqrt{t^2\cdot\frac{9}{t^2}}+10=16$$

等号成立は　$t^2=\dfrac{9}{t^2}$ より　$t^2=3$　　$0<t\leqq 3$ より，$t=\sqrt{3}$ のとき

よって，$t^2+\dfrac{9}{t^2}+10$ は，$t=\sqrt{3}$ のとき最小値 16 をとる．

以上より，$\sin\angle\mathrm{BPC}$ は $\mathbf{P}\left(\mathbf{0},\ \boldsymbol{\sqrt{3}}\right)$ のとき，最大値 $\dfrac{2}{\sqrt{16}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$ をとる．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

[2]　x に関する 2 つの不等式

$$1+\frac{1}{\log_3 x}-\frac{2}{\log_5 x}<0 \quad \cdots\cdots①\qquad \left(\frac{1}{3}\right)^{a\log_3 2}<\left(\frac{1}{2}\right)^{x(x-a+1)} \quad \cdots\cdots②$$

について，次の問いに答えよ．ただし，a は実数とする．

(1)　①を解け．　　(2)　①の解がすべて②を満たすような a の値の範囲を求めよ．

(1)　①より　$1+\dfrac{\log_{10}3}{\log_{10}x}-\dfrac{2\log_{10}5}{\log_{10}x}<0$

両辺に $(\log_{10}x)^2\,(>0)$ をかけると

$$(\log_{10}x)^2+\log_{10}3\cdot\log_{10}x-2\log_{10}5\cdot\log_{10}x<0$$

$$(\log_{10}x)^2-(\log_{10}5^2-\log_{10}3)\log_{10}x<0$$

$$\log_{10}x\left(\log_{10}x-\log_{10}\frac{25}{3}\right)<0 \quad \text{よって} \quad 0<\log_{10}x<\log_{10}\frac{25}{3}$$

したがって　$\boldsymbol{1<x<\dfrac{25}{3}}$

これは①における真数条件 $x>0$ および（分母）$\neq 0$ を満たす．

(2)　②の左辺$=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{a\log_3 2}=3^{-a\log_3 2}=3^{\log_3 2^{-a}}=2^{-a}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{a}$ より　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{a}<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x(x-a+1)}$

よって　$a>x(x-a+1)$ より，$x^2+(1-a)x-a<0$　　$(x+1)(x-a)<0$

$a<-1$ のとき　$a<x<-1$　①がこれを満たすことはない．よって不適．

$a=-1$ のとき　この不等式の解はなく不適．

$a>-1$ のとき　$-1<x<a$　①がこれを満たすのは $a\geqq\dfrac{25}{3}$ のとき．

以上より　$\boldsymbol{a\geqq\dfrac{25}{3}}$

[3]　$e=2.718$ とする．e^e に最も近い整数を求めよ．必要ならば次の近似値を用いよ．

$\log_e 2=0.693$，$\log_e 3=1.099$，$\log_e 5=1.609$

$e^e=k$ とおき，両辺 e を底とする対数をとると　$\log_e e^e=\log_e k$ より，$\log_e k=e=2.718$

$$\log_e 15=\log_e(3\times5)=\log_e 3+\log_e 5=1.099+1.609=2.708$$

$$\log_e 16=\log_e 2^4=4\log_e 2=4\times0.693=2.772 \quad \text{より} \quad \log_e 15<\log_e k<\log_e 16$$

よって　$15<k<16$

ここで k が 15 と 16 のどちらに近いか調べる．

$$15.5=\frac{15+16}{2}>\sqrt{15\times16} \quad \text{より}$$

$$\log_e 15.5>\log_e\sqrt{15\times16}=\frac{1}{2}(\log_e 15+\log_e 16)=\frac{1}{2}(2.708+2.772)=2.740$$

よって　$\log_e 15.5>2.740>2.718=\log_e k$　　$15.5>k$

したがって，k は 16 よりも 15 に近い．以上より，e^e に最も近い整数は　**15**

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第４講　図形と方程式

1　xy 平面上の円 $x^2+y^2=1$ へ，この円の外部の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から２本の接線を引き，その接点を A，B とし，線分 AB の中点を Q とする．

(1)　点 Q の座標を a，b を用いて表せ．

(2)　点 P が円 $(x-3)^2+y^2=1$ の上を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ．

(1)　$\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ とおくと，A，B における円 $x^2+y^2=1$ の接線はそれぞれ

$$x_1x+y_1y=1,\quad x_2x+y_2y=1$$

これらがともに $\mathrm{P}(a,\ b)$ を通るので

$$x_1a+y_1b=1,\quad x_2a+y_2b=1\quad \text{より}\quad ax_1+by_1=1,\quad ax_2+by_2=1$$

この２式は，方程式 $ax+by=1$ が $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ を通ることを示している．

よって，直線 AB の方程式は $ax+by=1$　……①である．

また，直線 OP の方程式は $bx-ay=0$　……②であり，円の性質により点 Q は①と②の交点である．

①，②より　$x=\dfrac{a}{a^2+b^2}$，$y=\dfrac{b}{a^2+b^2}$　　よって　$\mathbf{Q}\left(\dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2},\ \dfrac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2}\right)$

(2)　$\mathrm{Q}(x,\ y)$ とおくと，$x=\dfrac{a}{a^2+b^2}$，$y=\dfrac{b}{a^2+b^2}$

$$x^2+y^2=\frac{1}{a^2+b^2}\quad x^2+y^2\neq 0\ \text{であるから}\quad a^2+b^2=\frac{1}{x^2+y^2}$$

よって　$a=\dfrac{x}{x^2+y^2}$

$\mathrm{P}(a,\ b)$ が円 $(x-3)^2+y^2=1$ の上を動くとき

$$(a-3)^2+b^2=1\quad \text{より}\quad a^2-6a+8+b^2=0$$

$$\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{6x}{x^2+y^2}+8=0$$

$$\left(x-\frac{3}{8}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{8}\right)^2$$

よって求める軌跡は，**中心** $\left(\dfrac{3}{8},\ \mathbf{0}\right)$，**半径** $\dfrac{1}{8}$ **の円**

2　x の２次関数 $f(x)=x^2+ax+b$ の最小値を M とする．$0\leqq f(0)\leqq 5$，$1\leqq f(1)\leqq 3$ であるとき，M の最大値と最小値，およびそれらを与える x の値を求めよ．

$f(x)=x^2+ax+b=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}+b$ より

$f(x)$ の最小値は $x=-\dfrac{a}{2}$ のとき　$M=-\dfrac{a^2}{4}+b$　……①

また，$0\leqq f(0)\leqq 5$ より　$0\leqq b\leqq 5$　……②

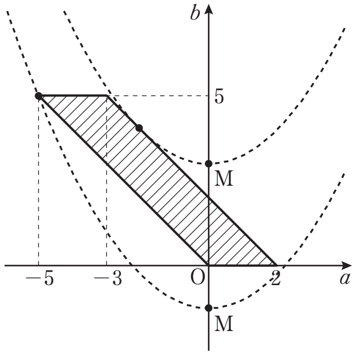
$1\leqq f(1)\leqq 3$ より　$0\leqq a+b\leqq 2$　……③

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

②, ③を満たす点 $(a,\ b)$ の存在範囲は右下図斜線部分（境界含む）であり，これを D とする．

$b=\dfrac{1}{4}a^2+M$　（下に凸の放物線）が D を通るときの，

頂点の y 座標 M の最大値，最小値を求める．



M が最大となるのは，この放物線が直線 $a+b=2$ に接するときである．

$b=\dfrac{1}{4}a^2+M$ と $a+b=2$ より b を消去し，a について整理した方程式

$$a^2+4a+4M-8=0 \quad \text{より} \quad (a+2)^2+4M-12=0$$

において重解 $a=-2$ をもつのは，$M=3$ のときであり，

これは領域 D 内にある．また，$x=-\dfrac{a}{2}=1$

M が最小となるのは，放物線が点 $(-5,\ 5)$ を通る場合である．

つまり $a=-5$，$b=5$ であり，このとき①より $M=-\dfrac{5}{4}$．また，$x=-\dfrac{a}{2}=\dfrac{5}{2}$

以上より，M の最大値は **3**　$(\boldsymbol{x=1})$　　　M の最小値は $\boldsymbol{-\dfrac{5}{4}}$　$\left(\boldsymbol{x=\dfrac{5}{2}}\right)$

3　xy 平面上の放物線

$$A：y=x^2,\ B：y=-(x-a)^2+b$$

は異なる 2 点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$　$(x_1>x_2)$ で交わるとする．

(1)　$x_1-x_2=2$ が成り立つとき，b を a で表せ．

(2)　$x_1-x_2=2$ を満たしながら a，b が変化するとき，直線 PQ の通過する領域を求め，図示せよ．

(3)　PQ$=2$ を満たしながら a，b が変化するとき，線分 PQ の中点の y 座標の最小値を求めよ．

---

(1)　2 つの放物線 A，B の方程式から y を消去して x について整理した方程式

$2x^2-2ax+a^2-b=0$ の 2 実数解が x_1，x_2　$(x_1>x_2)$ であることより，

$$x_1=\frac{a+\sqrt{-a^2+2b}}{2},\quad x_2=\frac{a-\sqrt{-a^2+2b}}{2}$$

よって　$x_1-x_2=2$ より，$\sqrt{-a^2+2b}=2$ であるから，$2b-a^2=4$　　$\boldsymbol{b=\dfrac{1}{2}a^2+2}$

(2)　2 点 P，Q を通る図形の式は，

$$(x^2-y)+k\{-(x-a)^2-y+b\}=0$$

$$(-1-k)y+(1-k)x^2+2akx-a^2k+bk=0$$

と表すことができる．これが直線を表すのは $k=1$ のときで，このとき，

直線 PQ：$2y=2ax-a^2+b$　……①　である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

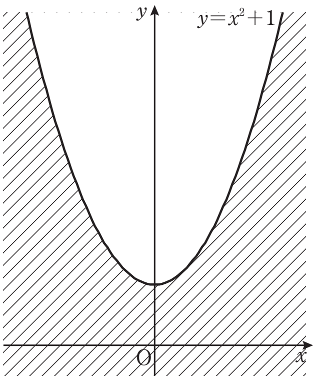
$(x,\ y)$ が①上の点であるということは，①を満たす実数 a が存在するということである．

①に(1)の結果を代入し，a について整理した式　$a^2-4ax+4y-4=0$　を a の 2 次方程式とみて，判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(-2x)^2-(4y-4)\geqq 0$$

ゆえに，求める領域は，$\boldsymbol{y\leqq x^2+1}$

（右図斜線部分．境界含む．）



(3)　①より直線 PQ の傾きは a である．よって，

$$\begin{aligned}PQ^2&=(x_1-x_2)^2+\{a(x_1-x_2)\}^2\\&=(1+a^2)(x_1-x_2)^2\\&=(1+a^2)(-a^2+2b)\end{aligned}$$

PQ＝2 より，$(1+a^2)(2b-a^2)=4$　……②

また，PQ の中点の y 座標は

$$\frac{x_1{}^2+x_2{}^2}{2}=\frac{(x_1-x_2)^2+2x_1x_2}{2}$$

$$=\frac{2b-a^2+2\cdot\dfrac{a^2-b}{2}}{2}=\frac{b}{2}$$

②より　$b=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4}{1+a^2}+a^2\right)$　これと（相加平均）≧（相乗平均）より

$$\frac{b}{2}=\frac{1}{4}\left(a^2+\frac{4}{1+a^2}\right)=\frac{1}{4}\left(1+a^2+\frac{4}{1+a^2}-1\right)$$

$$\geqq\frac{1}{4}\left(2\sqrt{(1+a^2)\cdot\frac{4}{1+a^2}}-1\right)=\frac{3}{4}$$

等号成立は　$1+a^2=\dfrac{4}{1+a^2}$　より　$(1+a^2)^2=4$　　$1+a^2=2$　　$a=\pm1$ のとき

以上より，求める最小値は　$\dfrac{3}{4}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第５講　微分法，積分法①

1　曲線 $y=x^3$ について

(1)　この曲線上の相異なる３点 $A(a,\ a^3)$，$B(b,\ b^3)$，$C(c,\ c^3)$ が同一直線上にあるための a，b，c の条件を求めよ．

(2)　点 $P(\alpha,\ \beta)$ よりこの曲線に相異なる３本の接線が引けるとき，α，β の条件を求め，点 $P(\alpha,\ \beta)$ の存在範囲を図示せよ．

(3)　(2)のとき，３つの接点を頂点とする三角形の重心の座標を α，β を用いて表せ．

(1)　直線 AB と直線 AC（共に A を通る）の傾きが等しければよい．

$$\frac{b^3-a^3}{b-a}=\frac{c^3-a^3}{c-a}\qquad b^2+ba+a^2=c^2+ca+a^2\qquad (b-c)(a+b+c)=0$$

$b\neq c$ であるから　$\boldsymbol{a+b+c=0}$

(2)　$y=x^3$　より　$y'=3x^2$

$x=t$ におけるこの曲線の接線の方程式は　$y=3t^2(x-t)+t^3$ より，$y=3t^2x-2t^3$

これが点 $P(\alpha,\ \beta)$ を通るとき，$\beta=3t^2\alpha-2t^3$ であるから，$2t^3-3\alpha t^2+\beta=0$　……①

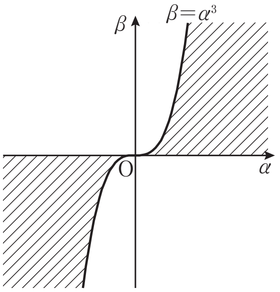
３次関数は接点が異なれば接線も異なるので，題意を満たすのは t の方程式①が異なる３つの実数解をもつときである．

$f(t)=2t^3-3\alpha t^2+\beta$ とおくと，$f'(t)=6t^2-6\alpha t=6t(t-\alpha)$ である．

求める条件は $f(t)$ が２極値をもち，それが異符号であることである．

よって　$f(0)\cdot f(\alpha)<0$ より，$\beta(\beta-\alpha^3)<0$

これより　$\boldsymbol{\begin{cases}\beta>\alpha^3\\ \beta<0\end{cases}}$　**または**　$\boldsymbol{\begin{cases}\beta<\alpha^3\\ \beta>0\end{cases}}$　したがって，点 $P(\alpha,\ \beta)$ の存在範囲は右図の斜線部分（境界含まない）．



(3)　３接点を $(a,\ a^3)$，$(b,\ b^3)$，$(c,\ c^3)$ とすると，三角形ができるためには(1)より　$a+b+c\neq 0$　……②

このとき，この３点の重心 $(x,\ y)$ の座標は　$x=\dfrac{a+b+c}{3}$，$y=\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}$

a，b，c は①の３解より，解と係数の関係から

$$a+b+c=\frac{3}{2}\alpha\ \ ((2)\text{より }\alpha\neq 0.\ \text{よって②を満たす}),\ ab+bc+ca=0,\ abc=-\frac{\beta}{2}$$

$$2a^3-3\alpha a^2+\beta=0\ \text{より}\quad a^3=\frac{3\alpha a^2-\beta}{2}\quad \text{同様に}\quad b^3=\frac{3\alpha b^2-\beta}{2},\ c^3=\frac{3\alpha c^2-\beta}{2}$$

よって　$x=\dfrac{\alpha}{2}$，

$$y=\frac{1}{2}\{\alpha(a^2+b^2+c^2)-\beta\}=\frac{1}{2}\{\alpha(a+b+c)^2-\beta\}\ (ab+bc+ca=0\ \text{より})$$

$$=\frac{9}{8}\alpha^3-\frac{1}{2}\beta$$

以上より，求める重心の座標は　$\boldsymbol{\left(\frac{1}{2}\alpha,\ \frac{9}{8}\alpha^3-\frac{1}{2}\beta\right)}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　正の数 a に対し，関数

$$y=x^2-ax \quad \left(\frac{a}{6}\leqq x\leqq\frac{5a}{6}\right)$$

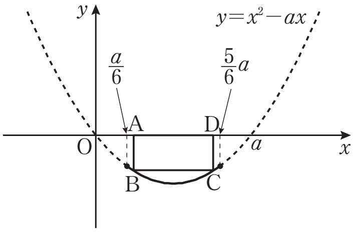
のグラフを C とする．長方形 T で1辺が x 軸に含まれ，その対辺の両端が C 上にあるものをすべて考える．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　長方形 T の周の長さの最大値を，a を用いて表せ．

(2)　長方形 T の面積の最大値を，a を用いて表せ．

(1)　$y=x^2-ax=\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}=x(x-a)$　軸：$x=\dfrac{a}{2}$

よって，この関数のグラフは右図．また，題意の長方形 ABCD を右図のようにとり，A$(t,\ 0)$ とおくと，$\dfrac{a}{6}\leqq t<\dfrac{a}{2}$



また，B$(t,\ t^2-at)$，C$(a-t,\ t^2-at)$，D$(a-t,\ 0)$

長方形 T の周の長さを $l(t)$ とおくと

$$l(t)=2(\mathrm{AB}+\mathrm{AD})=2\{(-t^2+at)+(a-2t)\}=-2t^2+2(a-2)t+2a$$

$$=-2\left(t-\frac{a-2}{2}\right)^2+\frac{a^2+4}{2}$$

(i)　$\dfrac{a-2}{2}<\dfrac{a}{6}$　$(0<a<3)$ のとき　最大値は　$l\left(\dfrac{a}{6}\right)=\dfrac{5}{18}a^2+\dfrac{4}{3}a$

(ii)　$\dfrac{a}{6}\leqq\dfrac{a-2}{2}$　$(a\geqq3)$ のとき　最大値は　$l\left(\dfrac{a-2}{2}\right)=\dfrac{a^2+4}{2}$

以上より，求める最大値は　**$0<a<3$ のとき $\dfrac{5}{18}a^2+\dfrac{4}{3}a$，$a\geqq3$ のとき $\dfrac{a^2+4}{2}$**

(2)　長方形 T の面積を $S(t)$ とおくと

$$S(t)=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}=(-t^2+at)(a-2t)=2t^3-3at^2+a^2t$$

$$S'(t)=6t^2-6at+a^2 \qquad S'(t)=0 \text{ より } \quad t=\frac{3-\sqrt{3}}{6}a \quad \left(\frac{a}{6}\leqq t<\frac{a}{2}\text{ より}\right)$$

よって，$S(t)$ の増減は右のようになり，

求める最大値は $S\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}a\right)$ である．

t	$\frac{a}{6}$	…	$\frac{3-\sqrt{3}}{6}a$	…	$\frac{a}{2}$
$S'(t)$		+	0	−	
$S(t)$		↗	最大	↘	

ここで，$S(t)\div S'(t)$ を計算することにより

$$S(t)=(6t^2-6at+a^2)\left(\frac{1}{3}t-\frac{a}{6}\right)-\frac{a^2}{3}t+\frac{a^3}{6}$$

よって，求める最大値は　$S\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}a\right)=-\dfrac{a^2}{3}\cdot\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}a+\dfrac{a^3}{6}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{18}a^3}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　［1］　$f(x)=\int_0^2 |t(t-x)|dt$ について

（1）　$0 \leqq x \leqq 2$ のとき，$f(x)$ を求めよ．

（2）　$\int_{-1}^2 f(x+1)dx$ を求めよ．

（1）　$f(x)=\int_0^x \{-t(t-x)\}dt+\int_x^2 t(t-x)dt=\left[-\frac{t^3}{3}+\frac{x}{2}t^2\right]_0^x+\left[\frac{t^3}{3}-\frac{x}{2}t^2\right]_x^2$

$$=-\frac{x^3}{3}+\frac{x^3}{2}+\frac{8}{3}-2x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^3}{2}=\boldsymbol{\frac{x^3}{3}-2x+\frac{8}{3}}$$

（2）　$\int_{-1}^2 f(x+1)dx=\int_0^3 f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx$

$2 \leqq x \leqq 3$ のとき　$f(x)=\int_0^2 \{-t(t-x)\}dt=\left[-\frac{t^3}{3}+\frac{x}{2}t^2\right]_0^2=2x-\frac{8}{3}$

よって　$\int_{-1}^2 f(x+1)dx=\int_0^2\left(\frac{x^3}{3}-2x+\frac{8}{3}\right)dx+\int_2^3\left(2x-\frac{8}{3}\right)dx$

$$=\left[\frac{x^4}{12}-x^2+\frac{8}{3}x\right]_0^2+\left[x^2-\frac{8}{3}x\right]_2^3=\mathbf{5}$$

3　［2］　$f(x)=4x^2-3ax+4\int_0^1 tf(t)dt$　……①，

$g(x)+\int_0^x (t+1)g'(t)dt=x^2+4x+a$　……②　のとき

（1）　$f(x)$ と $g(x)$ を求めよ．

（2）　方程式 $f(x)-xg(x)=0$ の 2 解を α，β として，

$h(a)=\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta (3x^2-2ax+a^2)dx$ の最小値を求めよ．

（1）　$\int_0^1 tf(t)dt=k$ とおくと，$f(x)=4x^2-3ax+4k$

$k=\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1 (4x^3-3ax^2+4kx)dx=1-a+2k$　これを解いて　$k=a-1$

よって　$\boldsymbol{f(x)=4x^2-3ax+4(a-1)}$

②の両辺を x で微分して　$g'(x)+(x+1)g'(x)=2x+4$　より　$(g'(x))x+2g'(x)=2x+4$

したがって　$g'(x)=2$　　また，②で $x=0$ のとき，$g(0)=a$ であるから　$\boldsymbol{g(x)=2x+a}$

（2）　$f(x)-xg(x)=2x^2-4ax+4(a-1)=0$ の 2 解が α，β であることより，解と係数の関係から　　$\alpha+\beta=2a$，$\alpha\beta=2(a-1)$　　よって　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4a^2-4a+4$

$h(a)=\frac{1}{\beta-\alpha}[x^3-ax^2+a^2x]_\alpha^\beta=\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2-a(\beta+\alpha)+a^2$

$$=3a^2-2a+2=3\left(a-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{5}{3}$$

よって，最小値は　$\boldsymbol{\frac{5}{3}}$　$\left(a=\frac{1}{3}\text{のとき}\right)$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第６講　微分法，積分法②

1　次の問いに答えよ．

(1)　x についての２次方程式 $x^2-2kx-3k^2+1=0$ が虚数解をもつような実数 k の値の範囲を求めよ．

(2)　(1)で求めた k の範囲で $F(k)=\int_0^k(x^2-2kx-3k^2+1)dx$ の最小値と最大値を求めよ．

(1)　$x^2-2kx-3k^2+1=0$ の判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4}=k^2-(-3k^2+1)=4k^2-1<0$　　$k^2<\dfrac{1}{4}$　　よって　$\boldsymbol{-\dfrac{1}{2}<k<\dfrac{1}{2}}$

(2)　$F(k)=\left[\dfrac{x^3}{3}-kx^2+(-3k^2+1)x\right]_0^k=-\dfrac{11}{3}k^3+k$

$F'(k)=-11k^2+1$　より，

$F'(k)=0$ のとき　$k=\pm\dfrac{1}{\sqrt{11}}$

k	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{11}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{11}}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$
$F'(k)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$F(k)$	$-\frac{1}{24}$	↘	$-\frac{2\sqrt{11}}{33}$	↗	$\frac{2\sqrt{11}}{33}$	↘	$\frac{1}{24}$

よって　$F(k)$ は　**最大値** $\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{11}}{33}}$，**最小値** $\boldsymbol{-\dfrac{2\sqrt{11}}{33}}$　をもつ．

2　中心 $(0,\ 1)$，半径１の円を C，放物線 $y=x^2$ を C_1 とする．また，円 C 上に頂点Ａをもつ放物線 $y=-(x-p)^2+q$ を C_2 とする．

(1)　C_2 の頂点Ａが $(0,\ 0)$ 以外にあるとき, C_1 と C_2 は異なる２点で交わることを示せ．

(2)　C_1 と C_2 によって囲まれる図形の面積を S とする．C_2 の頂点Ａが円 C 上を動くとき，S の最大値と，そのときのＡの座標を求めよ．

(1)　$C:x^2+(y-1)^2=1$ 上に C_2 の頂点 $(p,\ q)$ があるので

$p^2+(q-1)^2=1$　$(0<q\leqq 2)$　……①

C_1 と C_2 の交点の x 座標は　$x^2=-(x-p)^2+q$ より，$2x^2-2px+p^2-q=0$　……②

の２解である．この式の判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4}=p^2-2(p^2-q)=-p^2+2q=-\{1-(q-1)^2\}+2q=q^2>0$　(①より)

ゆえに，C_1 と C_2 は異なる２点で交わる．

(2)　②の２解を α，β $(\alpha<\beta)$ とすると，解と係数の関係より　$\alpha+\beta=p$，$\alpha\beta=\dfrac{p^2-q}{2}$

$$S=\int_\alpha^\beta\{-(x-p)^2+q-x^2\}dx=\int_\alpha^\beta(-2x^2+2px+q-p^2)dx$$

$$=\int_\alpha^\beta -2(x-\alpha)(x-\beta)dx=-2\cdot\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\}$$

$$=\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{3}\{(\beta-\alpha)^2\}^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}\{(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta\}^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}(q^2)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}q^3\quad(0<q\leqq 2)$$

よって，S は単調増加関数より，$q=2$ のとき S は最大となり，このとき　$p=0$

したがって　**S の最大値** $\boldsymbol{\dfrac{8}{3}}$，**A(0, 2)**

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　直線 $y=x$ を l，放物線 $y=x^2+1$ を C とする．

(1)　l 上の任意の点 P から C に 2 本の接線が引けることを示せ．

(2)　(1)の 2 本の接線と C で囲まれる部分の面積を S，接点の x 座標を α，β $(\alpha<\beta)$ とする．P が l 上を動くとき，$\dfrac{S}{\beta-\alpha}$ の最小値を求めよ．

(1)　$C: y=x^2+1$　より　$y'=2x$

$x=t$ における C の接線の方程式は　$y=2t(x-t)+t^2+1$　より　$y=2tx-t^2+1$

これが l 上の点 $\mathrm{P}(p,\ p)$ を通るとき　$p=2tp-t^2+1$　より　$t^2-2pt+p-1=0$　……①

①の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=p^2-(p-1)=p^2-p+1=\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$$

よって，任意の p で①は異なる 2 実数解をもつ．

ゆえに，l 上の任意の点 P から C に 2 本の接線が引ける．

(2)　①の 2 解が α，β $(\alpha<\beta)$ であることより

$$\alpha=p-\sqrt{p^2-p+1},\quad \beta=p+\sqrt{p^2-p+1}$$

よって　$\dfrac{\alpha+\beta}{2}=p$

$$\begin{aligned}
S&=\int_\alpha^p\{(x^2+1)-(2\alpha x-\alpha^2+1)\}dx+\int_p^\beta\{(x^2+1)-(2\beta x-\beta^2+1)\}dx\\
&=\int_\alpha^p(x-\alpha)^2dx+\int_p^\beta(x-\beta)^2dx\\
&=\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\right]_\alpha^p+\left[\frac{1}{3}(x-\beta)^3\right]_p^\beta\\
&=\frac{1}{3}(p-\alpha)^3-\frac{1}{3}(p-\beta)^3\\
&=\frac{1}{3}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha\right)^3-\frac{1}{3}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\beta\right)^3\\
&=\frac{1}{24}(\beta-\alpha)^3+\frac{1}{24}(\beta-\alpha)^3\\
&=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3
\end{aligned}$$

$$\frac{S}{\beta-\alpha}=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^2=\frac{1}{3}(p^2-p+1)=\frac{1}{3}\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

よって，$\dfrac{S}{\beta-\alpha}$ は $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ のとき最小値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$ をとる．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第７講　ベクトル

1　三角形 ABC があって，AB＝2，AC＝$\sqrt{3}$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3$ である．

(1)　三角形 ABC の内接円の半径を求めよ．

(2)　三角形 ABC の内心を I とする．$\overrightarrow{AI}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ と表すとき，x，y の値を求めよ．

(1)　$|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{AC}|^2-2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+|\overrightarrow{AB}|^2=3-2\times3+4=1$　よって　$|\overrightarrow{BC}|=1$

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4\times3-9}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって，求める内接円の半径を r とすると

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}r(AB+BC+CA)\quad より\quad \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}r(2+1+\sqrt{3})$$

よって　$\boldsymbol{r=\frac{\sqrt{3}-1}{2}}$

(2)　直線 AI と辺 BC の交点を D とすると，角の二等分線の性質より

$$BD:DC=AB:AC=2:\sqrt{3}\qquad よって\quad BD=\frac{2}{2+\sqrt{3}}BC=2(2-\sqrt{3})$$

$$AI:ID=AB:BD=2:2(2-\sqrt{3})=1:(2-\sqrt{3})$$

よって　$\overrightarrow{AI}=\dfrac{1}{1+(2-\sqrt{3})}\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{3-\sqrt{3}}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{2+\sqrt{3}}\overrightarrow{AC}\right)$

$$=\frac{1}{3-\sqrt{3}}\{\sqrt{3}(2-\sqrt{3})\overrightarrow{AB}+2(2-\sqrt{3})\overrightarrow{AC}\}$$

$$=\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}\overrightarrow{AB}+\frac{(3+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3-\sqrt{3}}{3}\overrightarrow{AC}$$

したがって　$\boldsymbol{x=\frac{\sqrt{3}-1}{2}}$，$\boldsymbol{y=\frac{3-\sqrt{3}}{3}}$

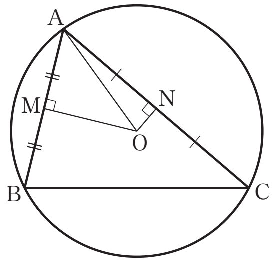
2　三角形 ABC の辺の長さをそれぞれ AB＝6，BC＝$2\sqrt{13}$，CA＝8 とする．

(1)　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ を求めよ．

(2)　三角形 ABC の外心を O とする．$\overrightarrow{AO}=l\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{AC}$ と表すとき，l，m の値を求めよ．

(1)　$|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{AC}|^2-2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+|\overrightarrow{AB}|^2$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{BC}|^2}{2}=\frac{36+64-52}{2}=\boldsymbol{24}$$



(2)　AB，AC の中点をそれぞれ M，N とすると

$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$　より　$(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AO})\cdot\overrightarrow{AB}=0$

$$\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-l\overrightarrow{AB}-m\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=0$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2 - l|\overrightarrow{AB}|^2 - m\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$$

したがって　$6l+4m=3$　……①

$\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{AC}=0$　より　$(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AO})\cdot\overrightarrow{AC}=0$

$$\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - l\overrightarrow{AB} - m\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AC} = 0$$

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2 - l\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} - m|\overrightarrow{AC}|^2 = 0$$

したがって　$3l+8m=4$　……②

①，②より　$\boldsymbol{l=\frac{2}{9}}$，$\boldsymbol{m=\frac{5}{12}}$

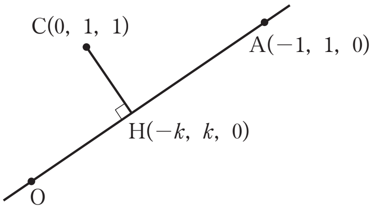
3　空間内の4点 O(0, 0, 0)，A(−1, 1, 0)，B(1, 0, 0)，C(0, 1, 1) をとる．

(1)　直線 OA 上の点 H をとって CH と OA が垂直であるようにする．H の座標を求めよ．また，C′(0, 1, 0)，$\angle \mathrm{CHC'}=\theta$ として $\cos\theta$ の値を求めよ．

(2)　直線 OA 上の点 P と直線 BC 上の点 Q との距離 PQ が最小となる P，Q の座標を求めよ．

---

(1)　$\overrightarrow{OH}=k\overrightarrow{OA}=(-k,\ k,\ 0)$ とおくと，H$(-k,\ k,\ 0)$



$\overrightarrow{CH}=(-k,\ k,\ 0)-(0,\ 1,\ 1)=(-k,\ k-1,\ -1)$

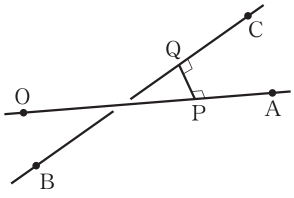
$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{OA}=0$　より　$k+(k-1)=0$

よって　$k=\frac{1}{2}$　　$\mathbf{H}\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)$

このとき　$\overrightarrow{HC}=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1\right)=\frac{1}{2}(1,\ 1,\ 2)$　より　$|\overrightarrow{HC}|=\frac{\sqrt{6}}{2}$

$\overrightarrow{HC'}=\overrightarrow{OC'}-\overrightarrow{OH}=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)=\frac{1}{2}(1,\ 1,\ 0)$　より　$|\overrightarrow{HC'}|=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HC'}}{|\overrightarrow{HC}||\overrightarrow{HC'}|}=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{3}}}$



(2)　$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}=(-s,\ s,\ 0)$

$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{BC}=(1,\ 0,\ 0)+t(-1,\ 1,\ 1)=(-t+1,\ t,\ t)$

$\overrightarrow{PQ}=(s-t+1,\ t-s,\ t)$

$|\overrightarrow{PQ}|$ が最小となるのは　$\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{OA}$　かつ　$\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{BC}$　のとき

$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{OA}=0$　より　$-s+t-1+t-s=0$　　よって　$2s-2t=-1$　……①

$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{BC}=0$　より　$-s+t-1+t-s+t=0$　　よって　$2s-3t=-1$　……②

①，②より　$s=-\frac{1}{2}$，$t=0$　　したがって　$\mathbf{P}\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 0\right)$，$\mathbf{Q(1,\ 0,\ 0)}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第８講　数列

|1| ［1］ ３辺の長さがいずれも 70 より小さい整数で，かつ等差数列になっている三角形は何個あるか．ただし，合同な三角形は区別しないものとする．

３辺のうち，最小辺の長さを a（>0）とすると，３辺の長さは a，$a+d$，$a+2d$（$d \geqq 0$）と表すことができる．

これらが三角形の３辺をなすので　$a+2d<a+(a+d)$　　よって　$d<a$　……①

また，題意より　$a+2d<70$ であるから　$a<70-2d$　……②

①，②より　$d<a<70-2d$　a は整数であるから　$d+1 \leqq a \leqq 69-2d$

このような a が存在するのは　$d+1 \leqq 69-2d$　より　$0 \leqq d \leqq 22$ のときである．

この d のそれぞれについて，a は $(69-2d)-(d+1)+1=69-3d$ 個存在する．

よって，求める三角形の個数は

$$\sum_{d=0}^{22}(69-3d)=3\sum_{d=0}^{22}(23-d)=3\cdot\frac{23(23+1)}{2}=\mathbf{828}\ \textbf{（個）}$$

|1| ［2］ $(1+x)(1+3x)(1+5x)\cdots\cdots\{1+(2n-1)x\}$ を展開したときの x^2 の係数を求めよ．

求める x^2 の個数は，1，3，5，……，（$2n-1$）のうち，異なる２数の積の和である．

その和は

$$\frac{1}{2}[\{1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)\}^2-\{1^2+3^2+5^2+\cdots\cdots+(2n-1)^2\}]$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\right)^2-\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2\right\}=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{n(1+2n-1)}{2}\right)^2-\sum_{k=1}^{n}(4k^2-4k+1)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{n^4-4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-n\right\}$$

$$=\frac{1}{6}n(3n^3-4n^2+1)$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{6}n(n-1)(3n^2-n-1)}$$

|2| r を 0 でない実数とする．数列 $\{a_n\}$ を $a_1=r$，$a_n=r+\dfrac{1}{r}a_{n-1}$　$(n \geqq 2)$ で定める．

（1） a_n を求めよ．

（2） $b_1=r$，$b_n=a_n+b_{n-1}$　$(n \geqq 2)$ を満たす数列 $\{b_n\}$ の第 n 項を求めよ．

(1)　$a_n=\dfrac{1}{r}a_{n-1}+r$，$a_1=r$

$r=1$ のとき　$a_n=a_{n-1}+1$，$a_1=1$ より　$a_n=1+(n-1)\cdot1=n$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$r\neq 1$ のとき　$a_n-\dfrac{r^2}{r-1}=\dfrac{1}{r}\left(a_{n-1}-\dfrac{r^2}{r-1}\right)$, $a_1-\dfrac{r^2}{r-1}=\dfrac{-r}{r-1}$

$$a_n-\frac{r^2}{r-1}=\left(\frac{-r}{r-1}\right)\cdot\left(\frac{1}{r}\right)^{n-1}=-\frac{r^2}{r-1}\left(\frac{1}{r}\right)^n$$

$$a_n=\frac{r^2}{r-1}\left\{1-\left(\frac{1}{r}\right)^n\right\}$$

以上より　**$r=1$ のとき　$a_n=n$,　　$r\neq 1$ のとき　$a_n=\dfrac{r^2}{r-1}\left\{1-\left(\dfrac{1}{r}\right)^n\right\}$**

(2)　$b_n-b_{n-1}=a_n$　より　$b_{n+1}-b_n=a_{n+1}$

よって，b_n の階差数列の一般項が a_{n+1} である．

$n\geqq 2$ のとき　$b_n=b_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}a_{k+1}=r+\sum_{k=1}^{n-1}a_{k+1}$

$r=1$ のとき　$b_n=1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)=1+(2+3+\cdots\cdots+n)=\frac{n(n+1)}{2}$　（$n=1$ でも成立）

$r\neq 1$ のとき　$b_n=r+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{r^2}{r-1}\left\{1-\left(\frac{1}{r}\right)^{k+1}\right\}$

$$=r+\frac{r^2}{r-1}\left[n-1-\frac{\left(\frac{1}{r}\right)^2\left\{1-\left(\frac{1}{r}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{r}}\right]$$

$$=\frac{r(r-1)}{r-1}+\frac{r^2}{r-1}\left\{n-1-\frac{1}{r}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{r}\right)^{n-1}}{r-1}\right\}$$

$$=\frac{r}{r-1}\left\{r-1+r(n-1)-\frac{1-\left(\frac{1}{r}\right)^{n-1}}{r-1}\right\}$$

$$=\frac{r}{(r-1)^2}\left\{(r-1)^2+r(n-1)(r-1)-1+\left(\frac{1}{r}\right)^{n-1}\right\}$$

$$=\frac{r}{(r-1)^2}\left\{-r+nr(r-1)+r\cdot\left(\frac{1}{r}\right)^n\right\}=\frac{r^2}{(r-1)^2}\left\{(r-1)n+\left(\frac{1}{r}\right)^n-1\right\}$$

（$n=1$ でも成立）

以上より
$$\begin{cases}\boldsymbol{r=1\text{のとき}\ \ b_n=\dfrac{n(n+1)}{2}}\\[2ex] \boldsymbol{r\neq 1\text{のとき}\ \ b_n=\left(\dfrac{r}{r-1}\right)^2\left\{(r-1)n+\left(\dfrac{1}{r}\right)^n-1\right\}}\end{cases}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 n は2以上の自然数とする．数学的帰納法を用いて次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2 \quad \cdots(※)$$

〔Ⅰ〕 $n=2$ のとき

$$(\text{左辺})=\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (\text{右辺})=2\sqrt{2}-2=\frac{4-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \quad \text{より}$$

$$\sqrt{2}\{(\text{右辺})-(\text{左辺})\}=(4-2\sqrt{2})-1=3-2\sqrt{2}=\sqrt{9}-\sqrt{8}>0$$

よって，(左辺)<(右辺)より，(※)は成り立つ．

〔Ⅱ〕 $n=k$（$\geqq 2$）のとき　(※)が成り立つとすると

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}<2\sqrt{k}-2$$

このとき　$\displaystyle \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k}-2+\frac{1}{\sqrt{k+1}}$

ここで　$\displaystyle 2\sqrt{k+1}-2-\left(2\sqrt{k}-2+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$

$$=\frac{1}{\sqrt{k+1}}\left\{2(k+1)-2\sqrt{k(k+1)}-1\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{k+1}}\left(k+1-2\sqrt{k(k+1)}+k\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{k+1}}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)^2>0$$

より　$\displaystyle 2\sqrt{k}-2+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k+1}-2$

つまり　$\displaystyle \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k+1}-2$　より

$n=k+1$ のときも(※)は成り立つ．

〔Ⅰ〕〔Ⅱ〕より，2以上のすべての自然数 n で(※)が成り立つ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第9講　総合問題(1)

1　xについての2次方程式 $x^2-2px+p^2-2p-1=0$ の2つの解を α, β とする．
$\dfrac{(\alpha-\beta)^2-2}{2\{(\alpha+\beta)^2+2\}}$ が整数となる実数 p をすべて求めよ．

解と係数の関係より

$\alpha+\beta=2p$,　$\alpha\beta=p^2-2p-1$

このとき

$$\frac{(\alpha-\beta)^2-2}{2\{(\alpha+\beta)^2+2\}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4p^2-4(p^2-2p-1)-2}{4p^2+2}=\frac{4p+1}{4p^2+2}=k \quad \text{とおく}$$

$4kp^2-4p+2k-1=0$　……①

$k=0$ のとき題意を満たし，このとき　$p=-\dfrac{1}{4}$

$k\neq 0$ のとき　p は実数より，①の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=4-4k(2k-1)\geqq 0 \qquad 2k^2-k-1\leqq 0 \qquad \text{よって}\quad -\frac{1}{2}\leqq k\leqq 1$$

k は0でない整数より　$k=1$

このとき $D=0$ より①は重解 $p=\dfrac{2}{4k}=\dfrac{1}{2}$ をもつ

以上より　$\boldsymbol{p=-\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{2}}$

2　m を2より大きい実数とする．x についての2つの方程式

$x^2-2^{m+1}x+3\cdot 2^m=0$　……①

$2\log_2 x-\log_2(x-1)=m$　……②

について，次の問いに答えよ．

(1)　方程式①，②ともに2つの異なる実数解をもつことを示せ．

(2)　方程式①の解のうち，ちょうど1つだけが方程式②の2つの解の間にあることを示せ．

(1)　$2^m=t$ とおくと　$m>2$　より　$t>4$

このとき①は $x^2-2tx+3t=0$　この判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4}=t^2-3t=t(t-3)>0$　よって，①は異なる2実数解をもつ．

②より　$\log_2 x^2=\log_2(x-1)+\log_2 2^m=\log_2 t(x-1)$

よって　$x^2=t(x-1)$

$x^2-tx+t=0$　$(t>4)$

②の真数条件より　$x>1$

よって，この x の方程式が $x>1$ に異なる2つの実数解をもてばよい．

$f(x)=x^2-tx+t$ とおき，方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$f(1)=1>0$，$y=f(x)$ の軸：$x=\dfrac{t}{2}>2>1$，$D=t(t-4)>0$

よって，②は異なる２実数解をもつ.

(2)　①の２解を α，β（$\alpha<\beta$）とおくと

$\alpha+\beta=2t \qquad \alpha\beta=3t$

また　$\alpha^2-2t\alpha+3t=0$　より　$\alpha^2=2t\alpha-3t$　　同様に　$\beta^2=2t\beta-3t$

このとき　
$$\begin{aligned} f(\alpha)\cdot f(\beta) &= (\alpha^2-t\alpha+t)(\beta^2-t\beta+t) \\ &= (t\alpha-2t)(t\beta-2t) \\ &= t^2(\alpha-2)(\beta-2) \\ &= t^2\{\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4\} \\ &= -t^2(t-4)<0 \end{aligned}$$

よって，①の解 α，β のうち１つだけが②の解の間にある.

3　ある人がサイコロを振る試行によって，部屋 A，B を移動する．サイコロの目の数が 1，3 のときに限り部屋を移る．また各試行の結果，部屋 A に居る場合はその人の持ち点に１点を加え，部屋 B に居る場合は１点を減らす．持ち点は負になることもあるとする．第 n 試行の結果，部屋 A，B に居る確率をそれぞれ $P_A(n)$，$P_B(n)$ と表す．最初にその人は部屋 A に居るものとし（つまり，$P_A(0)=1$，$P_B(0)=0$ とする），持ち点は１とする.

(1)　$P_A(1)$，$P_A(2)$，$P_A(3)$ および $P_B(1)$，$P_B(2)$，$P_B(3)$ を求めよ．また，第 3 試行の結果，その人が得る持ち点の期待値 $E(3)$ を求めよ.

(2)　$P_A(n+1)$，$P_B(n+1)$ を $P_A(n)$，$P_B(n)$ を用いて表せ.

(3)　$P_A(n)$，$P_B(n)$ を n を用いて表せ.

(4)　第 n 試行の結果，その人が得る持ち点の期待値 $E(n)$ を求めよ.

サイコロを１回振ったとき，部屋を移動する確率は $\dfrac{1}{3}$，移動しない確率は $\dfrac{2}{3}$

また，$P_A(n)+P_B(n)=1$　……①

(1)　$P_A(1)=P_A(0)\cdot\dfrac{2}{3}=\mathbf{\dfrac{2}{3}}$　　$P_B(1)=1-P_A(1)=1-\dfrac{2}{3}=\mathbf{\dfrac{1}{3}}$

$P_A(2)=P_A(1)\cdot\dfrac{2}{3}+P_B(1)\cdot\dfrac{1}{3}=\mathbf{\dfrac{5}{9}}$　　$P_B(2)=1-\dfrac{5}{9}=\mathbf{\dfrac{4}{9}}$

$P_A(3)=P_A(2)\cdot\dfrac{2}{3}+P_B(2)\cdot\dfrac{1}{3}=\mathbf{\dfrac{14}{27}}$　　$P_B(3)=1-\dfrac{14}{27}=\mathbf{\dfrac{13}{27}}$

$$\begin{aligned} E(3) &= 1+1\cdot P_A(1)+(-1)\cdot P_B(1)+1\cdot P_A(2)+(-1)\cdot P_B(2)+1\cdot P_A(3)+(-1)\cdot P_B(3) \\ &= 1+1\cdot\{P_A(1)+P_A(2)+P_A(3)\}+(-1)\cdot\{P_B(1)+P_B(2)+P_B(3)\} \\ &= \frac{74}{27}-\frac{34}{27}=\mathbf{\frac{40}{27}} \end{aligned}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2)　$\boldsymbol{P_A(n+1)=\frac{2}{3}P_A(n)+\frac{1}{3}P_B(n)}$　……②

$\boldsymbol{P_B(n+1)=\frac{1}{3}P_A(n)+\frac{2}{3}P_B(n)}$　……③

(3)　②−③より

$$P_A(n+1)-P_B(n+1)=\frac{1}{3}\{P_A(n)-P_B(n)\},\quad P_A(0)-P_B(0)=1$$

よって　$P_A(n)-P_B(n)=1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{3^n}$　……④

(①＋④)÷2 より　$\boldsymbol{P_A(n)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3^n}\right)}$

(①−④)÷2 より　$\boldsymbol{P_B(n)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}$

(4)　$E(n)=1+\sum_{k=1}^{n}\{1\cdot P_A(k)+(-1)\cdot P_B(k)\}$

$$=1+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k$$

$$=1+\frac{\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{3}}$$

$$=1+\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{3^n}\right)}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

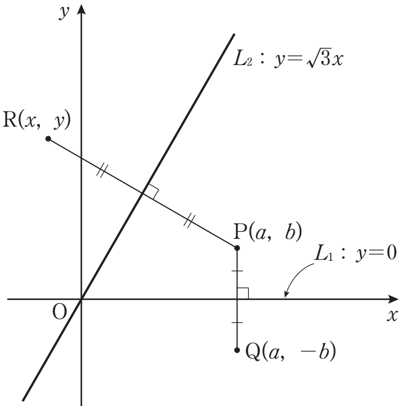
第 10 講　総合問題(2)

1　xy 平面上の 2 直線 L_1，L_2 を $L_1: y=0$ （x 軸），$L_2: y=\sqrt{3}x$ で定める．P を xy 平面上の点とする．直線 L_1 に関して P と対称な点を Q，直線 L_2 に関して P と対称な点を R とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) P の座標を (a, b) とするとき，R の座標を a，b を用いて表せ．

(2) 2 点 Q，R の距離が 2 になるような P の軌跡 C を求めよ．

(3) 点 P が C 上を動くとき，三角形 PQR の面積の最大値とそれを与える P の座標を求めよ．



(1) $\mathrm{R}(x, y)$ とおく．

PR $\perp L_2$ より　$(x-a)\cdot 1+(y-b)\cdot\sqrt{3}=0$

よって　$x+\sqrt{3}y=a+\sqrt{3}b$　……①

PR の中点が L_2 上より　$\dfrac{y+b}{2}=\sqrt{3}\cdot\dfrac{x+a}{2}$

よって　$\sqrt{3}x-y=-\sqrt{3}a+b$　……②

①，②より　$\mathbf{R}\left(\dfrac{-a+\sqrt{3}b}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}a+b}{2}\right)$

(2) $\mathrm{P}(a, b)$ のとき　$\mathrm{Q}(a, -b)$

$$\mathrm{QR}^2=\left(\frac{-a+\sqrt{3}b}{2}-a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}a+b}{2}+b\right)^2=3(a^2+b^2)$$

QR$=2$　より　$3(a^2+b^2)=4$　　$a^2+b^2=\dfrac{4}{3}$

よって，求める軌跡 C は円　$\boldsymbol{x^2+y^2=\dfrac{4}{3}}$

(3) $\mathrm{P}(a, b)$ のとき　$\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{1}{2}\times|2b|\times\left|a-\dfrac{-a+\sqrt{3}b}{2}\right|=\dfrac{1}{2}\left|b(3a-\sqrt{3}b)\right|$　この最大値を求める．

ここで，$a^2+b^2=\dfrac{4}{3}$ より　$a=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta$，$b=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta$　とおく（$0\leqq\theta<2\pi$）

$$\triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}\left|\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta(2\sqrt{3}\cos\theta-2\sin\theta)\right|=\frac{1}{\sqrt{3}}\left|2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta-2\sin^2\theta\right|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left|\sqrt{3}\sin 2\theta-(1-\cos 2\theta)\right|=\frac{1}{\sqrt{3}}\left|\sqrt{3}\sin 2\theta+\cos 2\theta-1\right|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left|2\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)-1\right|$$

$-1\leqq\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)\leqq 1$ より　$0\leqq\triangle\mathrm{PQR}\leqq\sqrt{3}$　　よって　$2\theta+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{7}{2}\pi$

したがって　$\theta=\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$ のとき　△PQR は最大値 $\sqrt{3}$ をとる．

このとき $\mathbf{P}\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \mp 1\right)$　（複合同順）

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 放物線 $y=x^2$ 上に2定点 A，B がある．P は放物線上で A と B の間にある点で，放物線と線分 AP とで囲まれる図形の面積 S_1 と，放物線と線分 PB とで囲まれる図形の面積 S_2 との和が最小になるようにとった点である．

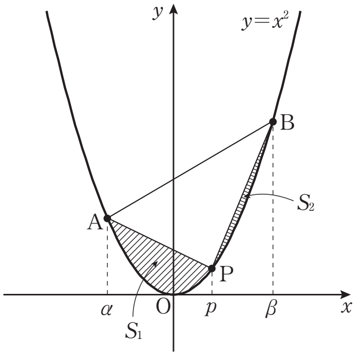
(1) S_1 と S_2 の比を求めよ．

(2) 点 P での放物線の接線に垂直な直線と，A，B を通る直線とのなす角を求めよ．

(1) 点 A，B，P の x 座標をそれぞれ α，β，p とする．$(\alpha<p<\beta)$

直線 AP の方程式は

$$y=\frac{p^2-\alpha^2}{p-\alpha}(x-\alpha)+\alpha^2 \quad \text{より} \quad y=(p+\alpha)x-p\alpha$$



$$S_1=\int_\alpha^p\{(p+\alpha)x-p\alpha-x^2\}dx$$

$$=\int_\alpha^p -(x-\alpha)(x-p)dx=\frac{1}{6}(p-\alpha)^3$$

同様に，直線 BP の方程式は

$$y=(p+\beta)x-p\beta \quad \text{であり} \quad S_2=\frac{1}{6}(\beta-p)^3$$

$$S_1+S_2=\frac{1}{6}\{(p-\alpha)^3+(\beta-p)^3\}$$

$$=\frac{1}{6}\{3(\beta-\alpha)p^2-3(\beta^2-\alpha^2)p+\beta^3-\alpha^3\}$$

$$=\frac{\beta-\alpha}{6}\{3p^2-3(\beta+\alpha)p+\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2\}$$

これを p の2次関数と見ると，これが最小になるのは　$p=\dfrac{3(\beta+\alpha)}{6}=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$　のとき

このとき　$p-\alpha=\beta-p=\dfrac{\beta-\alpha}{2}$ より　$\boldsymbol{S_1:S_2=1:1}$

(2) $y=x^2$ より　$y'=2x$

よって　$x=p=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$　における法線の傾きは　$-\dfrac{1}{\alpha+\beta}$

また，直線 AB の傾きは　$\dfrac{\beta^2-\alpha^2}{\beta-\alpha}=\alpha+\beta$

これらの積が -1 であることより，この2直線のなす角は **90°**

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 関数 $f(x)=x^3-x+\dfrac{2}{3}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ が減少しない x の範囲を求めよ．

(2) 点Pが曲線 $y=f(x)$ 上を動くとき，x 軸の正の方向と点Pにおけるこの曲線の接線のなす角を θ とする．θ のとりうる値の範囲を求めよ．ただし，$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする．

(3) n を正の整数とし，$n\leqq x<n+1$ の範囲で $f(x)$ の値が整数となる x の個数を a_n とする．a_n を n を用いて表し，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$ を求めよ．

(1) $f(x)=x^3-x+\dfrac{2}{3}$ より　$f'(x)=3x^2-1$

$f'(x)\geqq 0$ より　$3x^2-1\geqq 0$　　よって　$\boldsymbol{x\leqq -\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\leqq x}$

(2) 点Pの x 座標を p とすると　$\tan\theta=f'(p)=3p^2-1$

$3p^2-1\geqq -1$ より　$\tan\theta\geqq -1$　これと　$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より　$\boldsymbol{-\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}}$

(3) (1)より　$\dfrac{1}{\sqrt{3}}\leqq x$ において $f(x)$ は単調増加である．

よって　$n\leqq x<n+1$（n：正の整数）において，x と $f(x)$ は1：1に対応する．

ゆえに　$f(n)\leqq f(x)<f(n+1)$　……①

これを満たす $f(x)$ の値のうち，整数となるものの個数が求める a_n である．

①より　$n^3-n+\dfrac{2}{3}\leqq f(x)<(n+1)^3-(n+1)+\dfrac{2}{3}$

n は整数であることより　$n^3-n+1\leqq f(x)\leqq (n+1)^3-(n+1)$

この範囲において，$f(x)$ の整数値の個数は

$\{(n+1)^3-(n+1)\}-(n^3-n+1)+1=3n(n+1)$

よって　$\boldsymbol{a_n=3n(n+1)}$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\boldsymbol{\frac{n}{3(n+1)}}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

練習問題解答

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第１講　２次関数・方程式・不等式　　練習問題　解答

1　m を実数として，次の２次不等式について考える．$x^2-mx+(m-1)\leqq 0$　…①

以下の問いに答えなさい．

(1)　不等式①を満たす整数 x の個数がちょうど３個であるような実数 m の値の範囲を求めなさい．

(2)　**応用**　不等式①を満たす整数xの個数を $N(m)$ で表すことにする．mが整数のとき，$N(m)$ を m を用いて表しなさい．

解答例

(1)　①を変形すると　$(x-1)(x-m+1)\leqq 0$　　この不等式を満たす x は

（下に凸のグラフ！）

$1<m-1$　つまり　$2<m$ のとき　$1\leqq x\leqq m-1$

（場合分け）　$2=m$ のとき　$x=1$

$1>m-1$　つまり　$m<2$ のとき　$m-1\leqq x\leqq 1$

（ここをまとめて　$2\leqq m$ のとき $1\leqq x\leqq m-1$　としても可）

これらの範囲に含まれる整数が３個であるのは

$3\leqq m-1<4$　または　$-2<m-1\leqq -1$　のとき

よって　$\boldsymbol{-1<m\leqq 0,\ \ 4\leqq m<5}$

(2)　$2\leqq m$ のとき

①の整数解は　$1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m-1$

よって　$N(m)=(m-1)-1+1=m-1$

$m\leqq 1$のとき

（$m<2$ としたいところだが，m は「整数」であるため，「2 より小さい」整数，つまり「1 以下」と考えることができる．整数が関係する問題における範囲の表現方法として覚えておこう．）

①の整数解は　$m-1,\ m,\ \cdots\cdots,\ 1$

よって　$N(m)=1-(m-1)+1=-m+3$

以上より

$$\boldsymbol{N(m)=\begin{cases} m-1 & (2\leqq m) \\ -m+3 & (m\leqq 1)\end{cases}}$$

※ ［枠囲み］ は授業で触れたポイント．定着しているか確認しよう！

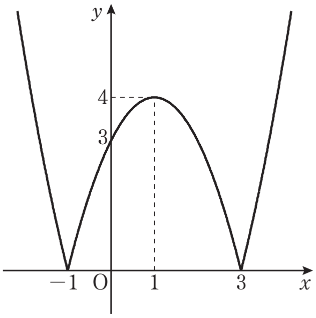
ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 (1) 関数 $y=|x^2-2x-3|$ のグラフをかけ.

(2) m を実数とする．このとき，方程式 $||x^2-2x-3|-m|=2$ の実数解の個数を求めよ.

解答例

(1) $y=|x^2-2x-3|=|(x-3)(x+1)|$ より，グラフは下のようになる.



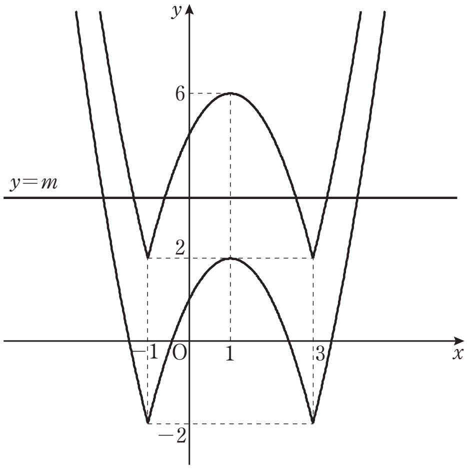
m を分離だ！

(2) $||x^2-2x-3|-m|=2$ より，$|x^2-2x-3|-m=\pm 2 \iff |x^2-2x-3|\pm 2=m$

したがって，方程式の実数解の個数は，$y=|x^2-2x-3|\pm 2$ のグラフ（(1)のグラフを y 軸方向に ± 2 平行移動したもの）と $y=m$ のグラフの共有点の個数である.

右図グラフより，求める実数解の個数は

$$\begin{cases} m<-2 \text{ のとき} & 0\text{個} \\ m=-2 \text{ のとき} & 2\text{個} \\ -2<m<2 \text{ のとき} & 4\text{個} \\ m=2 \text{ のとき} & 5\text{個} \\ 2<m<6 \text{ のとき} & 6\text{個} \\ m=6 \text{ のとき} & 5\text{個} \\ m>6 \text{ のとき} & 4\text{個} \end{cases}$$



ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第２講　場合の数・確率　　練習問題　解答

1　次のようなコイン投げのゲームを行う．はじめに３枚のコインを投げ，表の出たコインがあれば，２回目には，表の出たコインのみを投げる．３回目以降も同様に投げることとする．こうして，ある回で裏のみが出たところで，このゲームは終了となる．このとき，以下となる確率をそれぞれ求めよ．

(1)　１回目でゲームが終了しない．

(2)　２回投げてもゲームが終了しない．

(3)　２回目で表が１枚だけ出る．

解答例

余事象の利用

(1)　１回目で ゲームが終了する のは，すべて裏が出たときであり，その確率は

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{8}$

よって，　１回目でゲームが終了しない確率は　$1-\dfrac{1}{8}=\mathbf{\dfrac{7}{8}}$

１回目がすべて表なので３枚とも２回目も振る．よって２回目においても「１回目でゲームが終了しない確率」が使える．

(2)　題意を満たすのは，１回目に少なくとも１枚表が出た後，残ったコインを投げ，２回目に少なくとも１枚表が出る場合である．

１回目にすべて表のとき，確率は　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\times\left\{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\right\}=\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{7}{8}=\dfrac{7}{64}$

１回目に２枚のみ表のとき，確率は　${}_3C_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\times\left\{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right\}=3\cdot\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{3}{4}=\dfrac{9}{32}$

１回目に１枚のみ表のとき，確率は　${}_3C_1\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\times\left(1-\dfrac{1}{2}\right)=3\cdot\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{16}$

２回目のコインの枚数が１回目に応じて変化するため，２回目の確率が変化する計算となっている．

以上より，求める確率は　$\dfrac{7}{64}+\dfrac{9}{32}+\dfrac{3}{16}=\mathbf{\dfrac{37}{64}}$

【別解】　３枚のコインがすべて１回目または２回目に裏になればゲームは終了する．各コインにおいて，「１回目または２回目に裏が出る」ことの「余事象」は，「１回目，２回目ともに表が出る」ことである．よって，ゲームが終了する確率は

$\left\{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right\}^3=\left(\dfrac{3}{4}\right)^3=\dfrac{27}{64}$

ゆえに，２回投げてもゲームが終了しない確率は　$1-\dfrac{27}{64}=\mathbf{\dfrac{37}{64}}$

各コインに確率的な差がなく，またお互いの表裏の結果が（ゲームの終了以外に）他に影響を及ぼさないため，それぞれのコインの確率を考えるだけで解くことができた．

(3)　（(2)のように１回目の表の枚数による場合分けで解くこともできるが，ここは**【別解】**における「１回目または２回目に裏が出る」確率を利用する．）

題意を満たすのは，２回とも表が出るコインが１枚のみで，残り２枚は「１回目または２回目に裏が出る」ときである．よって，求める確率は　${}_3C_1\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^2=\mathbf{\dfrac{27}{64}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 箱の中に, 1から9までの番号を1つずつ書いた9枚のカードが入っている. ただし, 異なるカードには異なる番号が書かれているものとする. この箱から2枚のカードを同時に選び, 小さいほうの数をAとする. これらのカードを箱に戻して, 再び2枚のカードを同時に選び, 小さいほうの数をBとする. A=Bである確率を求めよ.

解答例

9枚のカードから2枚のカードを選ぶ場合の数は ${}_9C_2=36$（通り）.

1回目に選んだ2枚のカードの内, 小さい方の数を $A=k$（$k=1, 2, \cdots\cdots, 8$）とおくと大きい方の数は

$A=k$ のそれぞれに対して $k+1, k+2, \cdots\cdots, 9$ の $9-(k+1)+1=9-k$（通り）ある.

片方を文字でおき, それによってもう片方を表す.

よって, $A=k$（$k=1, 2, \cdots\cdots, 8$）となる確率は $\dfrac{9-k}{36}$

同様に, $B=k$（$k=1, 2, \cdots\cdots, 8$）となる確率についても $\dfrac{9-k}{36}$

よって, $A=B=k$（$k=1, 2, \cdots\cdots, 8$）となる確率は $\left(\dfrac{9-k}{36}\right)^2$

ゆえに, 求める確率は

$$\sum_{k=1}^{8}\left(\frac{9-k}{36}\right)^2=\frac{1}{36^2}\sum_{k=1}^{8}(9-k)^2$$
$$=\frac{1}{36^2}\sum_{i=1}^{8}i^2$$
$$=\frac{1}{36^2}\cdot\frac{1}{6}\cdot8\cdot9\cdot17$$
$$=\mathbf{\frac{17}{108}}$$

授業で扱ったのは「期待値」の計算におけるΣの利用.

A=B=1からA=B=9まですべての確率を出し, それを加えることも可能であるが,「1～9のカードの数字が連続していて欠けも重複もない」ところに注目すれば, 数字を「文字」で置いて確率を計算し, その和はΣに任せるという発想に至ることは自然であろう.

$$\sum_{k=1}^{8}(9-k)^2=8^2+7^2+\cdots\cdots+2^2+1^2$$
$$=\sum_{i=1}^{8}i^2$$

となる. Σは特に具体的な項の和として列挙することも必要であり, この書き換えも頻出である. ちなみに文字が k から i に変わっているが, 本当は変える必要はない. ただし,「意味を変えずに書き換えた」というニュアンスを濃く出すことも時には必要であるため, 多くの解答で文字が変わっている.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第3講　三角・指数・対数関数　　練習問題　解答

1　座標平面上の原点Oを中心とする半径1の円周上に，点Aがある．ただし，Aは第1象限の点である．点Aからx軸に下ろした垂線とx軸との交点をB，線分ABを2：1に内分する点をCとする．$\theta = \angle\mathrm{AOB}$のときの$\tan\angle\mathrm{BOC}$と$\tan\angle\mathrm{COA}$の値をそれぞれ$f(\theta)$，$g(\theta)$とおく．以下の問いに答えよ．

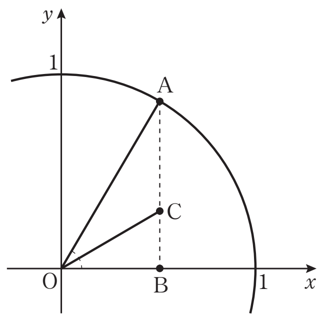
(1)　$f(\theta)$と$g(\theta)$をθを用いて表せ．

(2)　$g(\theta)$の$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$における最大値と，そのときのθの値を求めよ．

解答例

(1)　$\mathrm{A}(\cos\theta,\ \sin\theta)$より$\mathrm{B}(\cos\theta,\ 0)$，$\mathrm{C}\left(\cos\theta,\ \dfrac{1}{3}\sin\theta\right)$

三角比の定義より，円周上の点は媒介変数θを用いて表せる．
同様に，$x^2+y^2=r^2$上の点は$(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$と表せる．



よって　$f(\theta)=\tan\angle\mathrm{BOC}=\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{OB}}=\dfrac{\frac{1}{3}\sin\theta}{\cos\theta}=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}\tan\theta}$

$$g(\theta)=\tan(\angle\mathrm{BOA}-\angle\mathrm{BOC})$$
$$=\frac{\tan\angle\mathrm{BOA}-\tan\angle\mathrm{BOC}}{1+\tan\angle\mathrm{BOA}\cdot\tan\angle\mathrm{BOC}}$$
$$=\frac{\tan\theta-\frac{1}{3}\tan\theta}{1+\tan\theta\cdot\frac{1}{3}\tan\theta}=\boldsymbol{\frac{2\tan\theta}{3+\tan^2\theta}}$$

(2)　$\tan\theta=t$とおくと，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$　より　$t>0$

このとき，$g(\theta)=\boxed{\dfrac{2t}{3+t^2}=\dfrac{2}{\frac{3}{t}+t}}$

$g(\theta)$はこの変形をせずとも数学Ⅲの微分法を使えば最小値を求めることができる．分数関数において（分子の次数)≧(分母の次数）であれば「次数下げ」をすることは基本であるが，左式のような形を見たときに「**分母に寄せる**」経験を積んでおくと強くなるであろう．

相加平均≧相乗平均の関係より

$$(g(\theta)\text{の分母})=t+\frac{3}{t}\geqq 2\sqrt{t\cdot\frac{3}{t}}\geqq 2\sqrt{3}$$

等号成立は$t=\dfrac{3}{t}$　つまり　$t=\sqrt{3}\ (>0)$　のとき成立し，このとき　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$

よって，$(g(\theta)\text{の分母})\geqq 2\sqrt{3}$

したがって，$g(\theta)=\dfrac{2}{t+\frac{3}{t}}\leqq\dfrac{2}{2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$より，

$g(\theta)$の最大値は　$\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$　$\left(\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{3}}\textbf{のとき}\right)$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　[1]　$x>0$, $y>0$, $z>0$ であり，$xyz^3=1000$, $x^2yz=10$ が成り立つとき，
$L=(\log_{10}y)(\log_{10}x+8)$ の最大値を求めよ．

解答例

$xyz^3=1000$ において，両辺の常用対数をとると

$\log_{10}xyz^3=\log_{10}1000$ より，$\log_{10}x+\log_{10}y+3\log_{10}z=3$ ……①

$x^2yz=10$ において，同様に　$2\log_{10}x+\log_{10}y+\log_{10}z=1$ ……②

ここで，$\log_{10}x=X$, $\log_{10}y=Y$, $\log_{10}z=Z$ とおくと

①より　$X+Y=3-3Z$

②より　$2X+Y=1-Z$

これらより，$X=2Z-2$, $Y=-5Z+5$

このとき，$L=Y(X+8)=(-5Z+5)(2Z+6)=-10(Z-1)(Z+3)=-10(Z+1)^2+40$

よって，L の最大値は **40**

対数をとることは，今回の問題の設定では自然．その上で，「べき(累乗)」「積」を「和」「差」にしたことを強く意識しておかねばならない．

2　[2]　$x\geqq 1$, $y\geqq 1$ で $(\log_2x)^2+(\log_2y)^2=4$ のとき，xy の最大値と最小値を求めよ．

解答例

$\log_2x=X$, $\log_2y=Y$ とおくと，$x\geqq 1$, $y\geqq 1$ より　$X\geqq 0$, $Y\geqq 0$ ……①

$(\log_2x)^2+(\log_2y)^2=4$ より，$X^2+Y^2=4$ ……②

①，②の条件の下に，$\log_2xy=\log_2x+\log_2y=X+Y$ の最大，最小を考える．

対数をとることは [1] 同様, 今回の問題の設定では自然ではあるが，対数関数は「単調増加（単調減少）」であるため，真数の値と対数の値が１：１に対応している．よって，対数の値の最大・最小が真数（今回であれば xy）の最大・最小と一致する．頻出事項である．

①，②より，$X=2\cos\theta$, $Y=2\sin\theta$ $\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$$X+Y=2\cos\theta+2\sin\theta=2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\quad\left(\frac{\pi}{4}\leqq\theta+\frac{\pi}{4}\leqq\frac{3}{4}\pi\right)$$

1(1)参照のこと．半径は２である．なお，変域により媒介変数にも変域を設定する必要がある．

よって　$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq 1$

したがって，$2\leqq X+Y\leqq 2\sqrt{2}$ より，$\log_2 2^2\leqq\log_2xy\leqq\log_2 2^{2\sqrt{2}}$　つまり　$4\leqq xy\leqq 2^{2\sqrt{2}}$

ゆえに，xy の**最大値は** $2^{2\sqrt{2}}$，**最小値は 4**

※ほかにも $X+Y=k$ とおき，この「傾き -1 の直線」が $X^2+Y^2=4$, $X\geqq 0$, $Y\geqq 0$（「円周の一部」）と共有点をもつときの y 切片 k の最大値，最小値を求める方法や，連立して Y を消去してできた「X の２次方程式」が $X\geqq 0$ に実数解をもつ条件を考え , そのときの k の取り得る値の範囲から最大値，最小値を導く方法などが代表的である．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第４講　図形と方程式　　練習問題　解答

1　実数 t は $t>1$ を満たすとする．点 $\left(\frac{1}{2},\ t\right)$ から，円 $x^2+y^2=1$ に相異なる２本の接線を引き，２つの接点を通る直線を m とする．

(1)　直線 m の方程式を t を用いて表せ．

(2)　t を $t>1$ の範囲で動かすとき，t によらず m が通る点がある．この点の座標を求めよ．

解答例

明らかに「円外の点」であることがわかる．

(1)　点 $\left(\frac{1}{2},\ t\right)$ $(t>1)$ から円 $x^2+y^2=1$ に引いた２本の接線と円との接点を $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ とすると，２本の接線は

$x_1x+y_1y=1$，$x_2x+y_2y=1$　と表せる．

これらがともに $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2},\ t\right)$ を通るので

$x_1\cdot\frac{1}{2}+y_1\cdot t=1$，$x_2\cdot\frac{1}{2}+y_2\cdot t=1$

したがって　$\frac{1}{2}x_1+ty_1=1$，$\frac{1}{2}x_2+ty_2=1$

「極線」をモチーフとするこの問題を通じ，考え方を定着させよう．

この２式は，方程式 $\frac{1}{2}x+ty=1$ が $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ を通ることを示している．

よって，直線 m の方程式は $\boldsymbol{\frac{1}{2}x+ty=1}$　$(x+2ty-2=0)$

(2)　$x+2ty-2=0$　つまり　$(x-2)+2yt=0$

これが任意の実数 t で成り立つための条件は $x-2=0$ かつ $2y=0$

つまり　$x=2$　かつ　$y=0$

よって，t によらず m は，定点 $\mathbf{(2,\ 0)}$ を通る．

2　O を原点とする xy 平面において，直線 $y=1$ の $|x|\geqq 1$ を満たす部分を D とする．

(1)　D 上に点 $\mathrm{A}(t,\ 1)$ をとるとき，線分 OA の垂直二等分線の方程式を求めよ．

(2)　**応用**　点 A が D 全体を動くとき，線分 OA の垂直二等分線が通過する範囲を求め，それを図示せよ．

解答例

(1)　求める直線は，線分 OA の中点 $\left(\frac{t}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ $(|t|\geqq 1)$ を通り，OA $\left(傾き\ \frac{1}{t}\right)$ に垂直な直線である．よって，求める方程式は

$y=-t\left(x-\frac{t}{2}\right)+\frac{1}{2}$　　であるから　$\boldsymbol{y=-tx+\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}}$　…①

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2)　①より　$t^2-2xt-2y+1=0$　…②

「通過領域」の考え方を再度確認．ただし今回はパラメーターに「変域」が存在する．

$(x,\ y)$ が①上の点であるということは，②を満たす実数 t が $|t|\geqq 1$ に少なくとも１つ存在するということである．

ここで　$f(t)=t^2-2xt-2y+1$

$=(t-x)^2-x^2-2y+1$　とおくと，$f(t)$ のグラフの軸：$t=x$ であり

$f(-1)=2x-2y+2$　　$f(1)=-2x-2y+2$

満たすべき条件は

$f(-1)\leqq 0$　または　$f(1)\leqq 0$　……③

または $\begin{cases} f(-1)>0 \\ f(1)>0 \\ |(\text{グラフの軸})|>1 \\ (\text{グラフの頂点の}\ y\ \text{座標})\leqq 0 \end{cases}$ …④

である．

いわゆる「解の存在範囲（解の配置）」の問題．ただし，「少なくとも１つ」存在するための条件であるため，範囲内に解を何個配置するかは問題ではない．
たとえば③の「$f(-1)\leqq 0$」によって，「$t\leqq -1$」に１解をもつことはわかるが，もう１解が $1\leqq t$ にあるのか否かは不問．
その上で「または」によって，条件の「重複」があっても大丈夫である記述となっている．
（③と④は明らかに排反であるため，「または」と記述しつつも重複部分は存在しない）

③より　$y\geqq x+1$　または　$y\geqq -x+1$

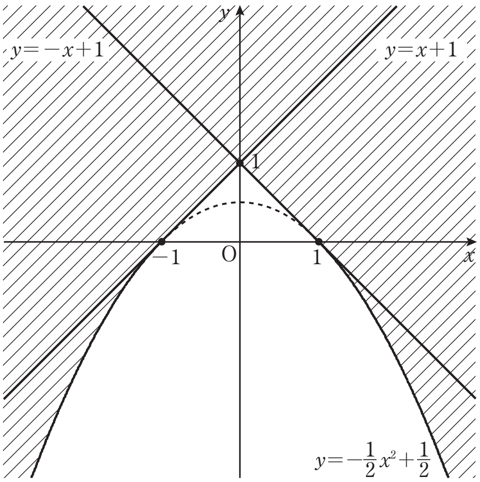
④より $\begin{cases} y<x+1 \\ y<-x+1 \\ |x|>1 \\ y\geqq -\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2} \end{cases}$

グラフからもわかるように，$y<x+1$ および $y<-x+1$ は残り２本と③で描かれる領域に「包含」されるため，最後の答えからははずしている．

よって，求める条件は

$$\boldsymbol{y\geqq x+1}\quad\textbf{または}\quad\boldsymbol{y\geqq -x+1}\quad\textbf{または}\quad\left(\boldsymbol{|x|>1}\ \textbf{かつ}\ \boldsymbol{y\geqq -\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}\right)$$

図示すると，下図斜線部分（境界含む）．



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第５講　微分法，積分法①　　練習問題　解答

1　a を実数とし，$f(x)=x^3-3ax^2+2x+2$ とする．次の問いに答えよ．

(1)　xy 平面において曲線 $y=f(x)$ の接線で傾きが m であるものが２本引けるとき，m の値の範囲を求めよ．

(2)　m が(1)で求めた範囲にあるとき，曲線 $y=f(x)$ の傾きが m である２本の接線の接点をそれぞれ P，Q とする．線分 PQ の中点 R の座標を求めよ．また，a がすべての実数値をとるとき，点 R が描く軌跡を求めよ．

解答例

(1)　$f'(x)=3x^2-6ax+2=3(x-a)^2-3a^2+2$

条件より，$f'(x)=m$ が異なる２実数解をもてばよい．　← **接点の個数＝接線の本数**

$y=f'(x)$ と $y=m$ のグラフが２交点をもつことより，

求める条件は $\boldsymbol{m>-3a^2+2}$　← 判別式 >0 で求めても可．

(2)　(1)のとき，$3x^2-6ax+2-m=0$ の異なる２実数解を α，β とおくと，解と係数の関係より　$\alpha+\beta=2a$，$\alpha\beta=\dfrac{2-m}{3}$　この α，β が接点 P，Q の x 座標である．

P$(\alpha,\ f(\alpha))$，Q$(\beta,\ f(\beta))$ とすると

$$
\begin{aligned}
f(\alpha)+f(\beta)&=(\alpha^3-3a\alpha^2+2\alpha+2)+(\beta^3-3a\beta^2+2\beta+2)\\
&=(\alpha^3+\beta^3)-3a(\alpha^2+\beta^2)+2(\alpha+\beta)+4\\
&=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)-3a\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}+2(\alpha+\beta)+4\\
&=8a^3-3\cdot\frac{2-m}{3}\cdot 2a-3a\left(4a^2-2\cdot\frac{2-m}{3}\right)+2\cdot 2a+4\\
&=8a^3-2(2-m)a-12a^3+2(2-m)a+4a+4\\
&=-4a^3+4a+4
\end{aligned}
$$

m は消えてしまう．つまり点 R は m によらない点である．

よって，線分 PQ の中点を R$(X,\ Y)$ とすると

$$X=\frac{\alpha+\beta}{2}=a$$

$$Y=\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}=-2a^3+2a+2$$

よって　$\boldsymbol{\mathrm{R}(a,\ -2a^3+2a+2)}$

この点 R は $y=f(x)$ 上の点であり
さらに $y=f(x)$ のグラフの「変曲点」である．傾きが同じ(＝平行)である２接線で，接点(を結ぶ線分)の中点が，この３次関数のグラフの対称点である変曲点であることはうなずけるはずである．

a がすべての実数値をとるとき，求める点 R の軌跡は

曲線 $\boldsymbol{y=-2x^3+2x+2}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

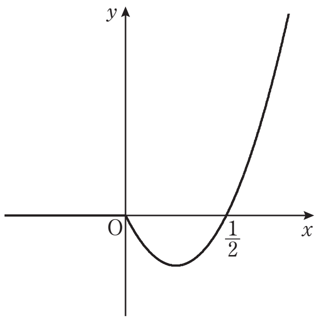
2 実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ を $f(x)=3\int_{x-1}^{x}(s+|s|)(s+|s|-1)ds$ によって定める.

(1) $f(x)$ を x の値について場合分けをして，x の多項式で表せ.

(2) 座標平面上に $y=f(x)$ のグラフをかけ.

(3) x がすべての実数を動くときの $f(x)$ の最小値を求めよ.

$$(s+|s|)(s+|s|-1)=\begin{cases}2s(2s-1) & (s\geqq 0)\\ 0 & (s<0)\end{cases}$$



$y=(s+|s|)(s+|s|-1)$

(1) (i) $x<0$ のとき　$f(x)=0$

(ii) $x-1\leqq 0\leqq x$　つまり　$0\leqq x\leqq 1$ のとき

$$f(x)=3\int_{x-1}^{0}0ds+3\int_{0}^{x}2s(2s-1)ds$$

$$=0+\left[4s^3-3s^2\right]_0^x=4x^3-3x^2$$

$\int_a^b 0\,ds=0$ である.

インテグラルの分割

(iii) $x-1>0$　つまり　$1<x$ のとき

$$f(x)=3\int_{x-1}^{x}2s(2s-1)ds$$

$$=\left[4s^3-3s^2\right]_{x-1}^{x}=12x^2-18x+7$$

以上より

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}0 & (x<0)\\ 4x^3-3x^2 & (0\leqq x\leqq 1)\\ 12x^2-18x+7 & (1<x)\end{cases}}$$

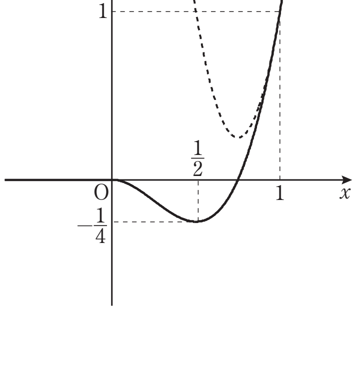
(2) $0\leqq x\leqq 1$ のとき　$f'(x)=12x^2-6x=6x(2x-1)$

また，$1<x$ のとき　$f(x)=12\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{1}{4}$ より

$1<x$ において $f(x)$ は単調増加.

よって，$y=f(x)$ のグラフは右図.

x	0	…	$\frac{1}{2}$	…	1
$f'(x)$	0	−	0	+	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	1



(3) (2)のグラフより $f(x)$ の最小値は

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\boldsymbol{-\frac{1}{4}}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第6講　微分法，積分法②　　練習問題　解答

1　放物線 C_1：$y=x^2$ と定点 $\mathrm{A}(a,\ b)$（ただし，$a^2<b$）を通る放物線 C_2：$y=-3x^2+2px+q$ の交点をP，Qとする．点P，Qの x 座標をそれぞれ α，β（ただし，$\alpha<\beta$）とする．2つの放物線 C_1，C_2 で囲まれた図形の面積を S とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　S を a，b，p を用いて表せ．

(2)　S を最小にする p とその最小値を a，b を用いて表せ．

解答例

(1)　C_2 が点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ を通るので，$b=-3a^2+2pa+q$　より，$q=3a^2-2pa+b$　……①

また，α，β は x の2次方程式　$x^2=-3x^2+2px+q$　　$4x^2-2px-q=0$　の2解より

$$\beta-\alpha=\frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{4}-\frac{p-\sqrt{p^2+4q}}{4}=\frac{\sqrt{p^2+4q}}{2}\quad\cdots\cdots②$$

よって

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}(-3x^2+2px+q-x^2)dx$$
$$=-4\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx$$
$$=\frac{2}{3}(\beta-\alpha)^3$$

インテグラルの中の関数が因数分解され，さらに公式に至る流れを再確認しよう．

$$=\boldsymbol{\frac{1}{12}(p^2-8ap+12a^2+4b)^{\frac{3}{2}}}\quad(①，②より)$$

(2)　$p^2-8ap+12a^2+4b=(p-4a)^2-4a^2+4b$

$b>a^2$ より　$-4a^2+4b>0$

(1)を解いている時点でグラフを描いたときに検証済であると思うが，面積がマイナスにならないことを再確認した．

よって，S を最小にする p は $\boldsymbol{p=4a}$ であり，

このときの最小値は　$\dfrac{1}{12}(-4a^2+4b)^{\frac{3}{2}}=\dfrac{1}{12}\cdot4^{\frac{3}{2}}\cdot(b-a^2)^{\frac{3}{2}}=\boldsymbol{\dfrac{2}{3}(b-a^2)^{\frac{3}{2}}}$

2　放物線 C：$y=\dfrac{1}{2}x^2$ 上に2点 $\mathrm{P}(2p,\ 2p^2)$，$\mathrm{Q}(2q,\ 2q^2)$ がある．ただし，$p<q$ である．点Pにおける接線と点Qにおける接線の交点を $\mathrm{R}(\alpha,\ \beta)$ とする．また，放物線 C と2直線PR，QRで囲まれる部分の面積を S とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　α，β を p，q を用いて表せ．　　(2)　S を p，q を用いて表せ．

(3)　$S=9$ かつ $\mathrm{PR}\perp\mathrm{QR}$ のとき，α，β の値を求めよ．

解答例

(1)　$y=\dfrac{1}{2}x^2$ より　$y'=x$

よって，点Pにおける C の接線の方程式は　$y=2p(x-2p)+2p^2$　より

$y=2px-2p^2$　……①

点Qにおける C の接線の方程式は　$y=2qx-2q^2$　……②

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

①，②より　$2px-2p^2=2qx-2q^2$　から　$(p-q)x=(p-q)(p+q)$

$p<q$ より　$x=p+q$　　このとき，①より　$y=2pq$

よって　$\boldsymbol{\alpha=p+q}$，$\boldsymbol{\beta=2pq}$

(2)　求める面積 S は

$$S=\int_{2p}^{\alpha}\left(\frac{x^2}{2}-2px+2p^2\right)dx+\int_{\alpha}^{2q}\left(\frac{x^2}{2}-2qx+2q^2\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{2p}^{\alpha}(x-2p)^2dx+\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{2q}(x-2q)^2dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}(x-2p)^3\right]_{2p}^{\alpha}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}(x-2q)^3\right]_{\alpha}^{2q}$$

「放物線とその接線」に関する問題．接点による因数分解からインテグラルの計算までを再確認！

$$=\frac{1}{6}(\alpha-2p)^3-\frac{1}{6}(\alpha-2q)^3$$

$$=\frac{1}{6}(p+q-2p)^3-\frac{1}{6}(p+q-2q)^3\quad(\alpha=p+q\text{より})$$

$$=\frac{1}{6}(q-p)^3+\frac{1}{6}(q-p)^3$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{3}(q-p)^3}$$

(3)　$S=9$ のとき

$\frac{1}{3}(q-p)^3=9$　より　$(q-p)^3=27$　　よって　$q-p=3$　……③

また，PR⊥QR より

$2p\cdot 2q=-1$　　よって　$pq=-\frac{1}{4}$　……④

③，④より

$$(p+q)^2=(p-q)^2+4pq=9+4\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=8$$

よって　$p+q=\pm 2\sqrt{2}$

以上より

$$\boldsymbol{\alpha=p+q=\pm 2\sqrt{2}},\ \boldsymbol{\beta=2pq=-\frac{1}{2}}$$

※繰り返すようであるが，1 2のインテグラルの計算はともに「２グラフの交点の x 座標による式の変形」をベースにしている．

２グラフの式を連立し，y を消去することにより x についての１つの式となり，グラフの交点の x 座標の値が x についての方程式の解となる．

$ax^2+bx+c=0$ が $x=\alpha,\ \beta$ を２解にもつ　$\Longleftrightarrow$　$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$

$ax^2+bx+c=0$ が $x=\alpha$ を重解にもつ　$\Longleftrightarrow$　$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2$

最高次の係数には特に注意を払うこと．

また，この「解による変形」を強く意識することにより，この分野だけにとどまらず式を同値変形したり，別に式を作成し係数比較することなども可能となる．

解と係数の関係，方程式への解の代入とともに確実に覚えておこう．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第７講　ベクトル　　練習問題　解答

1　三角形 ABC は $|\overrightarrow{AB}|=6$，$|\overrightarrow{AC}|=3$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2$ を満たしている．三角形 ABC の重心を G とし，線分 AB の中点を M とする．以下の問いに答えなさい．

(1)　線分 MG の長さを求めなさい．

(2)　∠AMG の二等分線と線分 AG との交点を N とするとき，線分 AN の長さを求めなさい．

(3)　三角形 AMG の内心を I とするとき，$\overrightarrow{AI}$ を $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ を用いて表しなさい．

解答例

(1)　$\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$=-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{6}(\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC})$

$|\overrightarrow{MG}|^2=\frac{1}{36}\left(|\overrightarrow{AB}|^2-4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+4|\overrightarrow{AC}|^2\right)=\frac{64}{36}=\frac{16}{9}$

よって　$|\overrightarrow{MG}|=\mathbf{\frac{4}{3}}$

あるベクトルの大きさを求める時，それが１次結合の形で表されているならば，大きさの２乗により内積計算に持ち込む．その際，１次結合の形が「通分」されていれば分子は「整式」のような状態となり，２乗の計算のミスが減ることが多い．
もちろん，与えられた大きさや内積の値により分数のままで計算した方がよい（計算中に分数でなくなる）場合もある．式と値を見回し，より良い方を選択できるよう訓練しておこう．

(2)　角の二等分線の性質より

ベクトルの伸縮比や内分比・外分比に影響を及ぼす性質．

$AN:NG=AM:MG=3:\frac{4}{3}=9:4$　　よって　$AN=\frac{9}{13}AG$

$|\overrightarrow{AG}|^2=\frac{1}{9}|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|^2=\frac{1}{9}\left(|\overrightarrow{AB}|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+|\overrightarrow{AC}|^2\right)=\frac{49}{9}$

よって　$|\overrightarrow{AG}|=\frac{7}{3}$

よって　　$AN=\frac{9}{13}\times\frac{7}{3}=\mathbf{\frac{21}{13}}$

(3)　角の二等分線の性質より

$MI:IN=MA:NA=3:\frac{21}{13}=13:7$

よって　$\overrightarrow{AI}=\frac{7}{20}\overrightarrow{AM}+\frac{13}{20}\overrightarrow{AN}$

$=\frac{7}{20}\times\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{13}{20}\times\frac{9}{13}\overrightarrow{AG}$

$=\frac{7}{40}\overrightarrow{AB}+\frac{9}{20}\times\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

$=\mathbf{\frac{13}{40}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{20}\overrightarrow{AC}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　座標空間の3点 A(1, 2, 2)，B(2, 1, 1)，C(2, 4, 2) を通る平面を Z とする．点 D(0, 2, 1) を通り，ベクトル $\vec{a}=(1,\ 1,\ 1)$ に平行な直線を l_1 とする．また点 D を通り，ベクトル $\vec{b}=(-1,\ -1,\ 1)$ に平行な直線を l_2 とする．このとき，以下の問いに答えなさい．

(1)　l_1 と Z の交点を E とし，l_2 と Z の交点を F とする．E，F の座標を求めなさい．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ のなす角を θ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とおくとき，$\cos\theta$ の値を求めなさい．

(3)　三角形 DEF の面積を求めなさい．

解答例

(1)　平面 Z 上の点 P$(x,\ y,\ z)$ について

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\left(\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\quad \text{より}$$

$$(x,\ y,\ z)=(1,\ 2,\ 2)+\alpha(1,\ -1,\ -1)+\beta(1,\ 2,\ 0)$$

$$=(1+\alpha+\beta,\ 2-\alpha+2\beta,\ 2-\alpha)\quad\cdots\cdots①$$

直線の作成

また，直線 l_1 上の点 Q$(x,\ y,\ z)$ について　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+s\vec{a}$　とすると

$$(x,\ y,\ z)=(0,\ 2,\ 1)+s(1,\ 1,\ 1)=(s,\ 2+s,\ 1+s)\quad\cdots\cdots②$$

P と Q が一致するとき，①，②より

$$\begin{cases}1+\alpha+\beta=s\\ 2-\alpha+2\beta=2+s\\ 2-\alpha=1+s\end{cases}$$

「交点」の座標は，一般的に2式を連立することによって求める．ベクトルにおいても同様，2通りで表して比較するが，今回のように「ベクトル方程式」(いつもなら y を x で表した式) を作成し，個々の座標に注目・比較する時と，1次独立な2つ（3つ）のベクトルで表し，その係数に注目・比較する場合に大きく分かれる．

これらより，$\alpha=-\dfrac{1}{4}$，$\beta=\dfrac{1}{2}$，$s=\dfrac{5}{4}$　　よって　$\mathbf{E}\left(\dfrac{5}{4},\ \dfrac{13}{4},\ \dfrac{9}{4}\right)$

同じく，直線 l_2 上の点 R$(x,\ y,\ z)$ について

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+t\vec{b}\quad \text{より}$$

$$(x,\ y,\ z)=(0,\ 2,\ 1)+t(-1,\ -1,\ 1)=(-t,\ 2-t,\ 1+t)\quad\cdots\cdots③$$

P と R が一致するとき，①，③より

$$\begin{cases}1+\alpha+\beta=-t\\ 2-\alpha+2\beta=2-t\\ 2-\alpha=1+t\end{cases}$$

これらより，$\alpha=-\dfrac{3}{2}$，$\beta=-2$，$t=\dfrac{5}{2}$　　よって　$\mathbf{F}\left(-\dfrac{5}{2},\ -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{7}{2}\right)$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\left(\dfrac{5}{4},\ \dfrac{5}{4},\ \dfrac{5}{4}\right)=\dfrac{5}{4}\vec{a}$　　$\overrightarrow{\mathrm{DF}}=\overrightarrow{\mathrm{OF}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\left(-\dfrac{5}{2},\ -\dfrac{5}{2},\ \dfrac{5}{2}\right)=\dfrac{5}{2}\vec{b}$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ のなす角は，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角に等しい．

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-1-1+1}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=-\frac{1}{3}$$

ここを(2)の解答の冒頭にいきなり記述してはならない．なぜならば，2ベクトルのなす角は，2直線のなす角とは異なりその「方向」によって定まる．
つまり $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ と $\vec{a}$ の「向き」が同じなのか逆なのかを考える必要がある．それにより鋭角と鈍角が入れ替わる．
向きによって異なるのは内積も同様である．

(3)　$\sin\theta=\sqrt{1-\dfrac{1}{9}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

よって　$\triangle\mathrm{DEF}=\dfrac{1}{2}\mathrm{DE}\times\mathrm{DF}\times\sin\theta=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5}{4}|\vec{a}|\times\dfrac{5}{2}|\vec{b}|\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=\mathbf{\dfrac{25\sqrt{2}}{8}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第８講　数列　　練習問題　解答

1 **応用** 数列 $\{a_n\}$ は次のように定められている．初項 $a_1=0$ であり，すべての自然数 n に対して

$a_{n+1}=-a_n+\dfrac{1+(-1)^{n+1}}{2}$ が成り立つ．このとき，次の問いに答えよ．

(1) a_3，a_4 を求めよ．

(2) α を定数として $b_n=(-1)^n(a_n+\alpha)$ とおく．$\{b_n\}$ が等差数列になるためには α をどのように定めればよいか．α の値を求めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を n を用いて表せ．

(4) 数列 $\{a_n\}$ の第 $2n$ 項までの 2 乗の和 $S_{2n}=a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots\cdots+a_{2n}{}^2$ を求めよ．

解答例

(1) $a_1=0$ と $a_{n+1}=-a_n+\dfrac{1+(-1)^{n+1}}{2}$ により　$a_2=-a_1+\dfrac{1+(-1)^2}{2}=0+1=1$

$$a_3=-a_2+\frac{1+(-1)^3}{2}=-1+0=\mathbf{-1}\qquad a_4=-a_3+\frac{1+(-1)^4}{2}=1+1=\mathbf{2}$$

(2) $b_{n+1}-b_n$ ←── **この計算結果がどうなれば「等差数列」に導けるか…**

$$=(-1)^{n+1}(a_{n+1}+\alpha)-(-1)^n(a_n+\alpha)=(-1)^{n+1}(a_{n+1}+\alpha)+(-1)^{n+1}(a_n+\alpha)$$
$$=(-1)^{n+1}(a_{n+1}+a_n+2\alpha)$$
$$=(-1)^{n+1}\left\{\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}+2\alpha\right\}$$
$$=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+2\alpha\right)(-1)^{n+1}\quad ((-1)^{n+1}\cdot(-1)^{n+1}=\{(-1)\cdot(-1)\}^{n+1}=1^{n+1}=1\text{ より})$$

$\{b_n\}$ が等差数列になるためには，この値が n に関係なく一定になればよい．

よって　$\dfrac{1}{2}+2\alpha=0$　　$\boldsymbol{\alpha=-\dfrac{1}{4}}$

(3) (2)より　$\alpha=-\dfrac{1}{4}$ のとき　$b_n=(-1)^n\left(a_n-\dfrac{1}{4}\right)$　……①　を満たす数列 $\{b_n\}$ は

公差 $\dfrac{1}{2}$ の等差数列．

また，$b_1=-\left(a_1-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{4}$　　よって　$b_n=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}(n-1)=\dfrac{2n-1}{4}$

したがって　$(-1)^n\left(a_n-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{2n-1}{4}$

両辺に $(-1)^n$ をかけることにより

$$a_n-\frac{1}{4}=(-1)^n\cdot\frac{2n-1}{4}$$

よって　$\boldsymbol{a_n=\dfrac{1}{4}\{1+(-1)^n(2n-1)\}}$

(2)は明らかに(3)のための「誘導」．なぜ突然「等差数列」が出てきたのか疑問をもつかもしれない．しかし，与えられた漸化式を見て，(2)のような変形を行うことで等差数列になることに「気づけば」苦労しないわけで，多くの人が気づかないであろう．だからこそ(2)の誘導がある．それに乗れたかどうかが鍵．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(4) (3)の結果より，k を自然数として

$$a_{2k-1}=\frac{1}{4}\{-(4k-3)+1\}=-k+1 \qquad a_{2k}=\frac{1}{4}\{(4k-1)+1\}=k$$

よって　$S_{2n}=\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}{}^2+a_{2k}{}^2)=\sum_{k=1}^{n}\{(-k+1)^2+k^2\}$

$$=\sum_{k=1}^{n}(2k^2-2k+1)$$

$$=2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-n(n+1)+n=\boldsymbol{\frac{1}{3}n(2n^2+1)}$$

「第 $2n$ 項までの和」の多くがこの「偶数項」と「奇数項」をそれぞれ n 項ずつ加えるという解法に至る．(1)で帰納的に項を導くことによりそれに気づくことは難しいかもしれないが，入試の世界においては典型的解法である．ここは誘導なしで導きたい．Σ の計算が1つですむこともポイント．

---

2 **発展**　n は2以上の整数であり，$\frac{1}{2}<a_j<1$　$(j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ とする．このとき，不等式

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots\cdots(1-a_n)>1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots\cdots+\frac{a_n}{2^{n-1}}\right)\quad\cdots\cdots(※)$$

が成り立つことを示せ．

解答例

［Ⅰ］ $n=2$ のとき

$$(1-a_1)(1-a_2)-\left\{1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}\right)\right\}=a_1a_2-\frac{a_2}{2}=a_2\left(a_1-\frac{1}{2}\right)>0\quad\left(\frac{1}{2}<a_1,\ a_2<1\text{より}\right)$$

よって，$n=2$ のときに（※）は成り立つ．

［Ⅱ］ $n=k$ のときに（※）が成り立つと仮定する．

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots\cdots(1-a_k)>1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots\cdots+\frac{a_k}{2^{k-1}}\right)$$

ここで

この置き換えは，いたずらに答案が冗長になるのを防ぐため．

$(1-a_1)(1-a_2)\cdots\cdots(1-a_k)=A_k$，$a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots\cdots+\frac{a_k}{2^{k-1}}=B_k$ とおくと，

この仮定は　$A_k>1-B_k$　と表される．

このとき　$A_{k+1}=A_k\cdot(1-a_{k+1})=A_k-a_{k+1}A_k>1-B_k-a_{k+1}A_k=1-(B_k+a_{k+1}A_k)$

目的の形を頭に浮かべ，仮定を用いてまず部分的に下げた．

ここで　$B_{k+1}-(B_k+a_{k+1}A_k)$

$$=\frac{a_{k+1}}{2^k}-a_{k+1}A_k$$

$$=a_{k+1}\left(\frac{1}{2}\right)^k-a_{k+1}(1-a_1)(1-a_2)\cdots\cdots(1-a_k)\quad\cdots\cdots①$$

ここで，$\frac{1}{2}<a_l<1$ より　$\frac{1}{2}>1-a_l>0$　$(l=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ k)$，$a_{k+1}>0$ であるから

辺々掛けて① >0 が導かれる．

したがって　$B_k+a_{k+1}A_k<B_{k+1}$　つまり　$1-(B_k+a_{k+1}A_k)>1-B_{k+1}$

よって，$A_{k+1}>1-B_{k+1}$ となり，$n=k+1$ のときも（※）は成り立つ．

［Ⅰ］［Ⅱ］より，$n\geqq 2$ のすべての自然数 n で（※）が成り立つ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第９講　総合問題(1)　　練習問題　解答

1	等式 $\lvert x-2y \rvert = y+\sqrt{1-x}+1$ ……① を満たす整数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．

解答例

①の左辺は整数より，右辺も整数である．よって，$\sqrt{1-x}$ は整数である．

よって，$\sqrt{1-x}=k$ （k は 0 以上の整数）とおくと，$x=1-k^2$

(i) $x \geqq 2y$ のとき

$$x-2y=y+\sqrt{1-x}+1$$

$$3y=x-1-\sqrt{1-x}=-k^2-k=-k(k+1)$$

$x \geqq 2y$ より　$3x \geqq 6y$　であるから　$3(1-k^2) \geqq -2k(k+1)$

$$k^2-2k-3 \leqq 0 \qquad \text{よって} \quad -1 \leqq k \leqq 3$$

k は負でない整数より，$k=0,\ 1,\ 2,\ 3$

$k=0$ のとき　$x=1,\ y=0$

$k=1$ のとき　$x=0,\ y=-\dfrac{2}{3}$　よって不適

$k=2$ のとき　$x=-3,\ y=-2$

$k=3$ のとき　$x=-8,\ y=-4$

> この右辺の形は「隣接２整数の積」であり，いずれかは偶数．これを左辺の $3y$ と比較すると y は偶数であることがわかる．また逆に k または $k+1$ のいずれかが３の倍数であることもわかる．

(ii) $x<2y$ のとき

$$-x+2y=y+\sqrt{1-x}+1$$

$$y=x+1+\sqrt{1-x}=-k^2+k+2=-(k-2)(k+1)$$

$x<2y$ より　$1-k^2<-2(k-2)(k+1)$

$$k^2-2k-3<0 \qquad \text{よって} \quad -1<k<3$$

k は負でない整数より，$k=0,\ 1,\ 2$

$k=0$ のとき　$x=1,\ y=2$

$k=1$ のとき　$x=0,\ y=2$

$k=2$ のとき　$x=-3,\ y=0$

以上より　$\boldsymbol{(x,\ y)=(-8,\ -4),\ (-3,\ -2),\ (-3,\ 0),\ (0,\ 2),\ (1,\ 0),\ (1,\ 2)}$

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 コインを投げ，点 P を次の規則によって正三角形 ABC の頂点 A, B, C 上を動かす．点 P が A にあるときは，表が出たら B に動かし，裏が出たら C に動かす．B にあるときは，表が出たら C に動かし，裏が出たら A に動かす．C にあるときは，表が出たら A に動かし，裏が出たら B に動かす．

はじめは点 P は A にあるとし，コインを n 回投げた後に P が A にある確率を a_n，B にある確率を b_n，C にある確率を c_n とする．

(1) a_{n+1}，b_{n+1}，c_{n+1} をそれぞれ a_n，b_n，c_n を用いて表せ．　(2) a_n を求めよ．

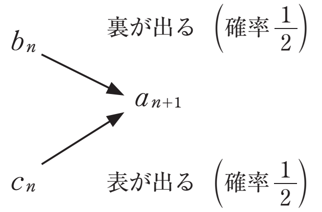
解答例

(1) $\boldsymbol{a_{n+1}=\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{2}c_n}$

$\boldsymbol{b_{n+1}=\frac{1}{2}c_n+\frac{1}{2}a_n}$

$\boldsymbol{c_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}b_n}$

状態遷移図より明らかであろう.



(2) $a_n+b_n+c_n=1$ より

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}(b_n+c_n)=\frac{1}{2}(1-a_n)$$
$$=-\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}$$

したがって　$a_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(a_n-\frac{1}{3}\right)$,　$a_1-\frac{1}{3}=0-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$

よって　$a_n-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$　　$\boldsymbol{a_n=\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}$

※　$a_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(a_n-\frac{1}{3}\right)$,　$a_0-\frac{1}{3}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

最初は A にいるので $a_0=1$ と考えることができる.

よって　$a_n-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$　　$a_n=\frac{1}{3}\left\{1+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}=\boldsymbol{\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}$

$a_n=a_1r^{n-1}=a_0r^n$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 10 講　総合問題(2)　　練習問題　解答

1　円 C_1：$x^2+y^2=25$ と円 C_2：$(x-10)^2+(y-5)^2=50$ の 2 つの交点と原点を通る円を C とする．次の問いに答えよ．

(1)　円 C の中心と半径を求めよ．

(2)　点 P$(x,\ y)$ が円 C 上を動くとき，$2y-x$ の最大値を求めよ．

(3)　円 C_1 と円 C_2 の 2 つの交点を通る円の中心の軌跡を求めよ．

解答例

(1)　2 円 C_1，C_2 の交点を通る図形は

$x^2+y^2-20x-10y+75+k(x^2+y^2-25)=0$　……①　（k：実数）と表される．

これが原点を通るとき　$75-25k=0$　より　$k=3$

よって，求める円 C の方程式は

$$4x^2+4y^2-20x-10y=0 \qquad \text{よって}\quad \left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{4}\right)^2=\frac{125}{16}$$

中心 $\left(\frac{5}{2},\ \frac{5}{4}\right)$，半径 $\frac{5\sqrt{5}}{4}$

(2)　$2y-x=k$ とおき，$x-2y+k=0$ $\left(\text{傾き}\frac{1}{2}\text{の直線}\right)$ が円 C と共有点をもつときの k の最大値を求める．

C の中心 $\left(\frac{5}{2},\ \frac{5}{4}\right)$ と直線 $x-2y+k=0$ との距離と C の半径との関係より

$$\frac{\left|\frac{5}{2}-2\cdot\frac{5}{4}+k\right|}{\sqrt{1+4}}\leqq\frac{5\sqrt{5}}{4}$$

$$|k|\leqq\frac{25}{4}$$

よって　$-\frac{25}{4}\leqq k\leqq\frac{25}{4}$

したがって，求める最大値は **$\frac{25}{4}$**

(3)　2 円が異なる 2 交点 A，B をもつとき，その 2 円の中心はともに共通弦 AB の垂直二等分線上にある．よって求める円の中心の軌跡は，2 円 C_1，C_2 の共通弦の垂直二等分線である．

①が直線を表す式となるのは，$k=-1$ のときで

$-20x-10y+100=0$　より　$y=-2x+10$　　これがその共通弦の方程式

よって，求める軌跡は C_1 の中心 $(0,\ 0)$ を通る傾き $\frac{1}{2}$ の直線　**$y=\frac{1}{2}x$**

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 放物線 C：$y=x^2-4x+3$ と直線 l：$y=mx-m$ を考える．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 放物線 C と直線 l が接するときの m の値 m_0 を求めよ．

(2) $m>m_0$ とする．放物線 C と直線 l および y 軸で囲まれた図形の面積を D_1 とし，放物線 C と直線 l で囲まれた図形の面積を D_2 とする．D_1 と D_2 をそれぞれ m を用いて表せ．

(3) $m>m_0$ における D_2-2D_1 の最小値，およびそのときの m の値を求めよ．

解答例

(1) C と l の方程式より

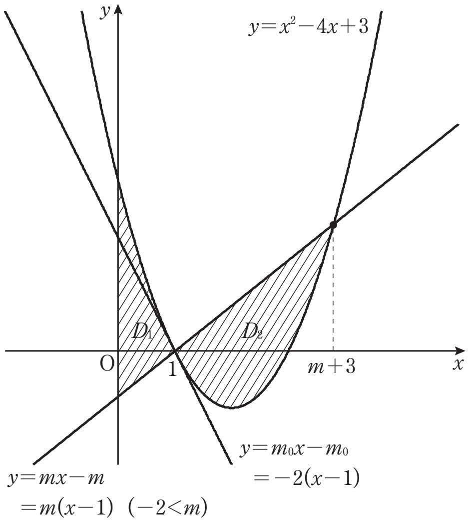
$x^2-4x+3=mx-m$　より　$x^2-(m+4)x+m+3=0$　……①

①の判別式を D とすると

$D=(m+4)^2-4(m+3)=(m+2)^2=0$

よって　$m=-2$

したがって　$\boldsymbol{m_0=-2}$



(2) $D_1=\displaystyle\int_0^1\{x^2-4x+3-(mx-m)\}dx$

$=\left[\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{m+4}{2}x^2+(m+3)x\right]_0^1=\dfrac{1}{2}m+\dfrac{4}{3}$

①の 2 実数解を α，β（$\alpha<\beta$）とすると

$D_2=\displaystyle\int_\alpha^\beta\{mx-m-(x^2-4x+3)\}dx$

$=-\displaystyle\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx$

$=\dfrac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\dfrac{1}{6}(\sqrt{D})^3=\dfrac{1}{6}(m+2)^3$　（$m>-2$ より）

以上より　$\boldsymbol{D_1=\dfrac{1}{2}m+\dfrac{4}{3}}$，　$\boldsymbol{D_2=\dfrac{1}{6}(m+2)^3}$

(3) $D_2-2D_1=\dfrac{1}{6}(m+2)^3-2\left(\dfrac{1}{2}m+\dfrac{4}{3}\right)$

$=\dfrac{1}{6}m^3+m^2+m-\dfrac{4}{3}=f(m)$　とおく．

$f'(m)=\dfrac{1}{2}m^2+2m+1=\dfrac{1}{2}(m^2+4m+2)$

m	-2	$\cdots$	$-2+\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(m)$		$-$	0	$+$
$f(m)$		↘		↗

$f'(m)=0$ となる m は　$m=-2+\sqrt{2}$　（$m>-2$ より）

$f(m)=f'(m)\cdot\left(\dfrac{1}{3}m+\dfrac{2}{3}\right)-\dfrac{2}{3}m-2$ より

求める最小値は　$f(-2+\sqrt{2})=-\dfrac{2}{3}(-2+\sqrt{2})-2=\boldsymbol{-\dfrac{2}{3}(1+\sqrt{2})}$　$(\boldsymbol{m=-2+\sqrt{2}})$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

受験サプリ